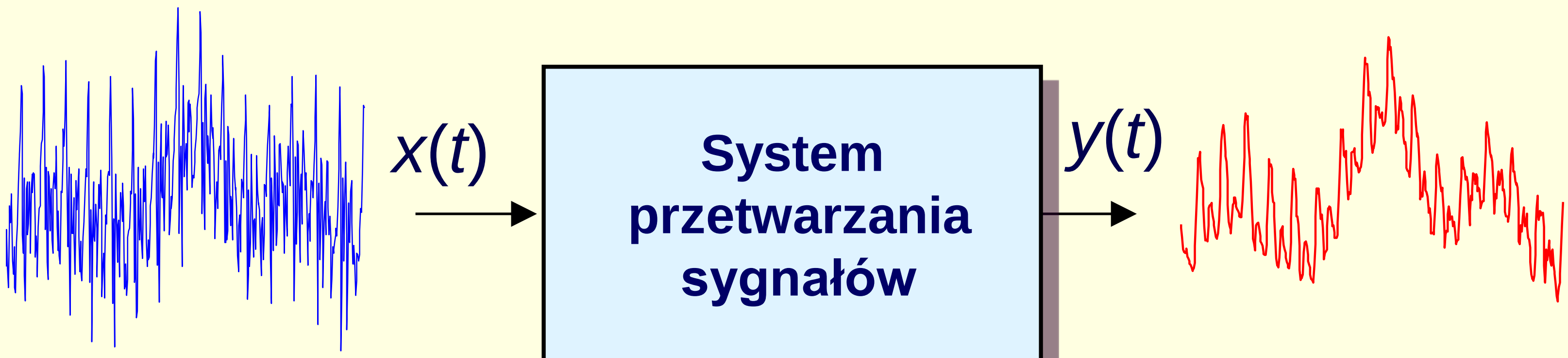
Systemy przetwarzania sygnałów

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

?

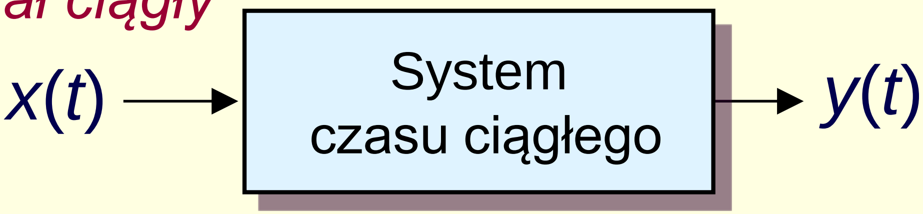


Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Systemy przetwarzania sygnałów

$y(t)=H(x(t))$

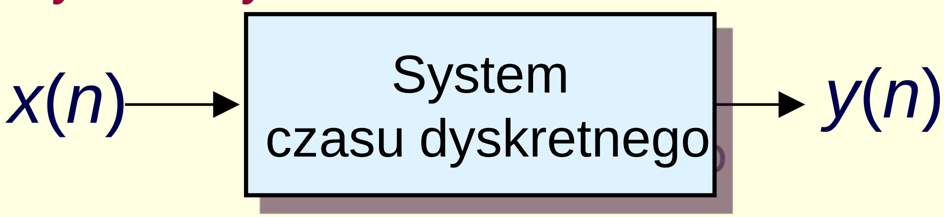
sygnał ciągły



np. megafon - wzmacniacz analogowy

sygnał dyskretny

$y(n)=H(x(n))$



np. model pogłosu:

$y(n)=0.1*y(n-1)+x(n)$,

→ filtry cyfrowe

t – ciągła zmienna czasu

n – dyskretna zmienna czasu $n = 0, 1, \ldots N, \ldots$

Właściwości systemów przetwarzania sygnałów

1. Systemy z pamięcią i bez pamięci
2. Systemy odwracalne i nieodwracalne
3. Systemy **przyczynowe** i nieprzyczynowe
4. Systemy **stabilne** i niestabilne
5. Systemy **liniowe** i nieliniowe
6. Systemy **niezmienne względem czasu** (przesunięcia) i zmienne względem czasu

Przykłady?

Systemy z pamięcią i bez pamięci

Sygnał wyjściowy systemu **bez pamięci** w chwili *n* zależy tylko od sygnału wejściowego w tej samej chwili, np.:

$$y(n) = 3x(n) + 2x^2(n)$$

Sygnał wyjściowy systemu **z pamięcią** w chwili *n* zależy sygnału wejściowego występującego w chwilach czasu $k \neq n$, np.:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \longrightarrow y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Systemy przyczynowe

Systemy jest **przyczynowy** gdy jego sygnał wyjściowy w chwili *n* jest zależny tylko sygnału wejściowego w chwili *n* i/lub sygnału wejściowego z chwil przeszłych, np.:

$$y(n) = x(n) + x(n-10)$$

$$\cancel{y(n) = x(n) - x(n+1)}$$

nieprzyczynowy

Systemy stabilne/niestabilne

System jest **stabilny** jeżeli dla sygnału wejściowego $x(n)$ spełniającego warunek $|x(n)|<A$ (gdzie: A – jest stałą o ograniczonej wartości) próbki wytwarzane wyjściu systemu spełniają warunek $|y(n)|<B$ (gdzie: B – jest również stałą o ograniczonej wartości)

1. Który z poniższych systemów jest stabilny?

a) $y(n) = x^3(n)$

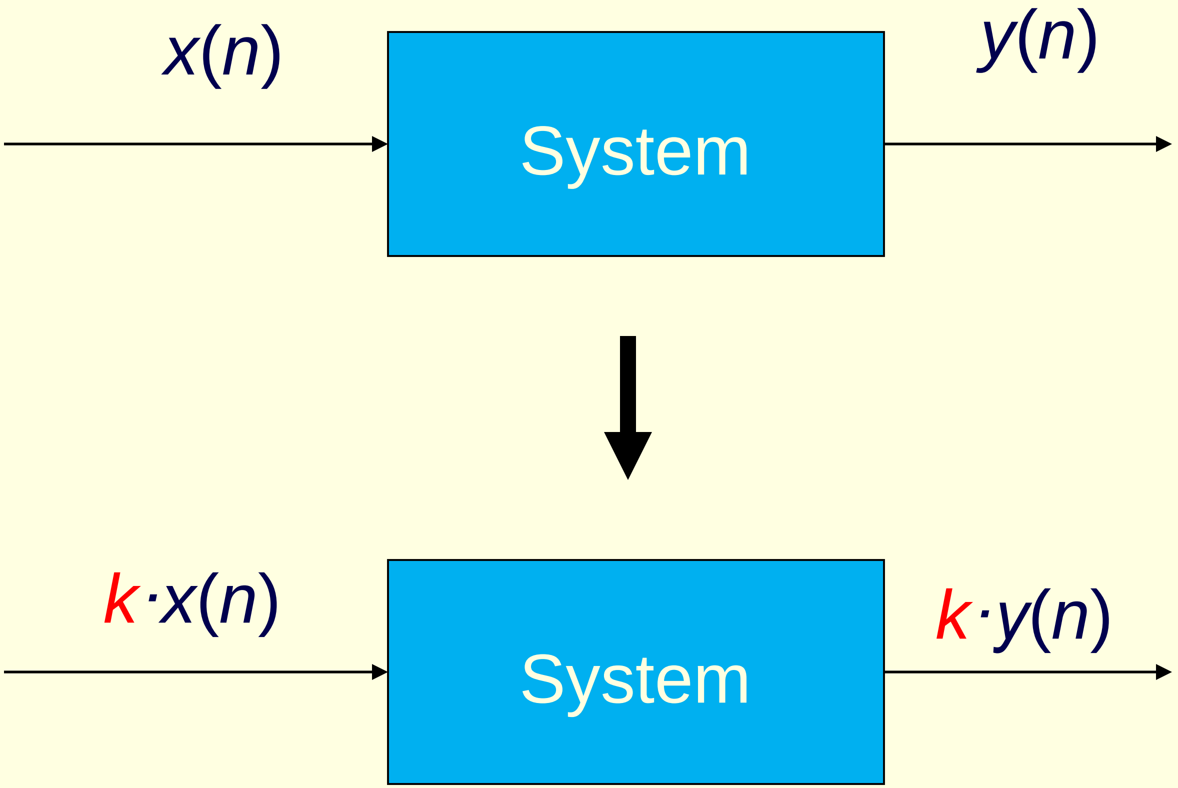
b) $y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \, u(n)$ gdzie $u(n)$ jest sekwencją impulsów jednostkowych

c) $y(n) = k^2 x(-n)$ gdzie k jest stałą

d) $y(n) = \sum_{n=0}^{N} x(n)$

Systemy jednorodne

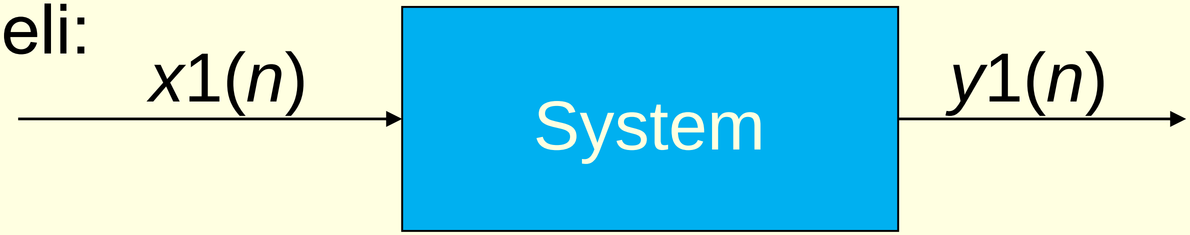
Jeżeli:



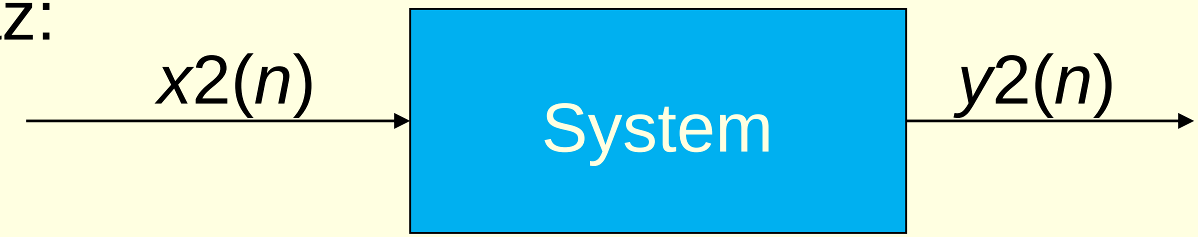
to:

Systemy addytywne

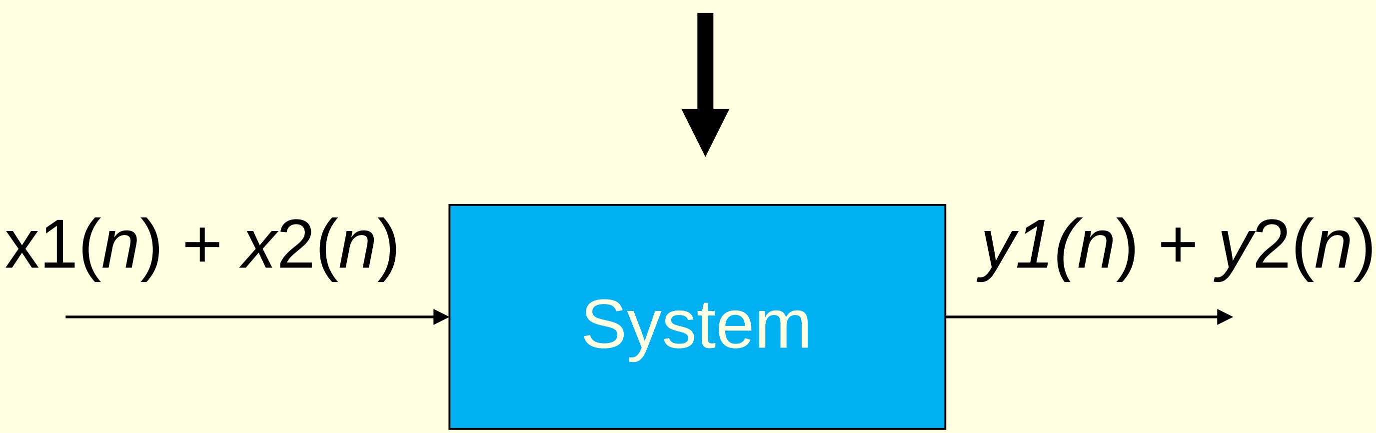
Jeżeli:



oraz:

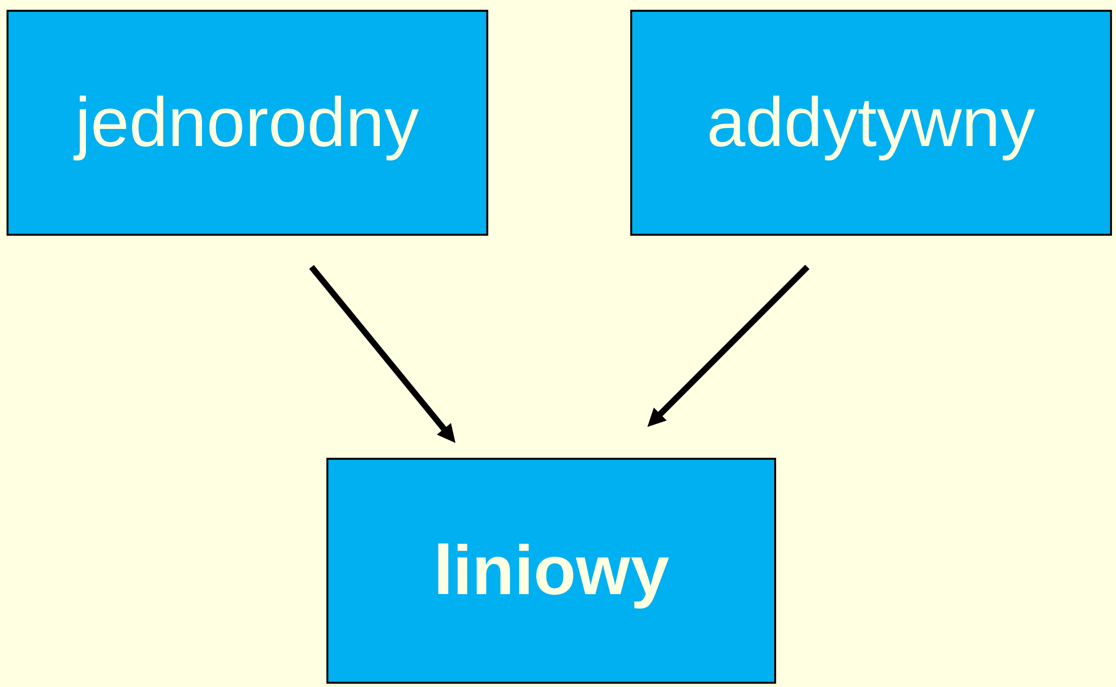


to:



Systemy liniowe

Jeżeli system jest jednorodny i addytywny to jest liniowy.



Zasada superpozycji

Systemy linowe spełniają zasadę superpozycji:

$$\boxed{H\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aH\left[x_1(n)\right]+bH\left[bx_2(n)\right]=ay_1(n)+by_2(n)}$$

tj. odpowiedź systemu liniowego na sumę sygnałów wejściowych jest równa sumie odpowiedzi systemu na poszczególne sygnały składowe.

Przykład systemu liniowego: $y(n)=3x(n)$

Przykład systemu nieliniowego: $y(n)=x^2(n)$

Systemy liniowe

Czy system: $y(n) = 2x(n) + 1$ jest liniowy?

Nie!

Niech: $x_1(n) = 2 \quad i \quad x_2(n) = 3$

$$y_1(n) = 2x_1(n) + 1 = 5 \qquad y_2(n) = 2x_2(n) + 1 = 7$$

Jednakże:

$$y_3(n) = 2[x_1(n) + x_2(n)] + 1 = 11 \neq y_1(n) + y_2(n) = 12$$

Wniosek: *Odpowiedź systemu liniowego na zerowe pobudzenie jest …?*

Systemy liniowe

Czy system: $y(n) = 2x(n) + 1$ liniowy?

Zasada superpozycji mówi:

$$\boxed{H\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] = ay_1(n) + by_2(n)}$$

$$H\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] = 2\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] + 1 = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) + 1$$

Jednak:

$$ay_1(n) + by_2(n) = 2ax_1(n) + 2bx_2(n) + a + b$$

Systemy liniowe

1. Który z poniższych systemów jest liniowy? Pokaż obliczenia.

a) $y(n) = 3x(n)$

b) $y(n) = \sum_{n=0}^{N} x(n)$

c) $y(n) = k^2 x(-n)$

d) $y(n) = x^2(n)$

e) $y(t) = a\log(x(t))$

f) $y(t) = \int_{o}^{t} x(\tau)d\tau$

Systemy liniowe niezmienne względem przesunięcia

Systemy niezmienne względem przesunięcia posiadają następującą właściwość:

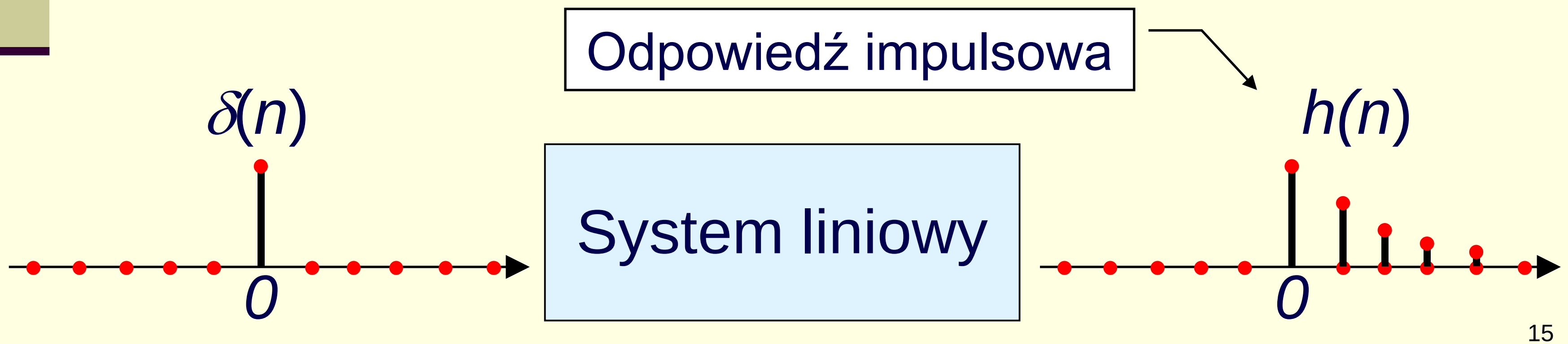
Jeżeli $y(n)$ jest odpowiedzią systemu na pobudzenie $x(n)$ to $y(n\text{-}k)$ jest odpowiedzią systemu na $x(n\text{-}k)$.

$$y(n) = H[x(n)] \Rightarrow y(n-k) = H[x(n-k)]$$

Skoncentrujemy się na systemach liniowych niezmiennych względem przesunięcia.

Systemy liniowe niezmienne względem przesunięcia

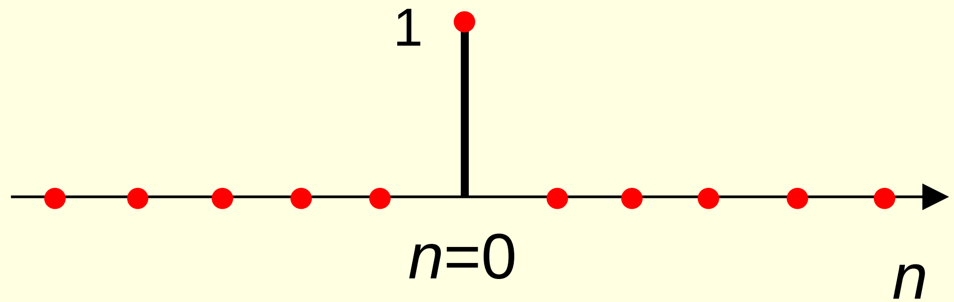
Pokażemy, że dla systemów liniowych niezmiennych względem przesunięcia, znajomość odpowiedzi systemu na pobudzenie impulsowe $\delta(n)$ pozwala wyznaczyć odpowiedź systemu na dowolny sygnał wejściowy.



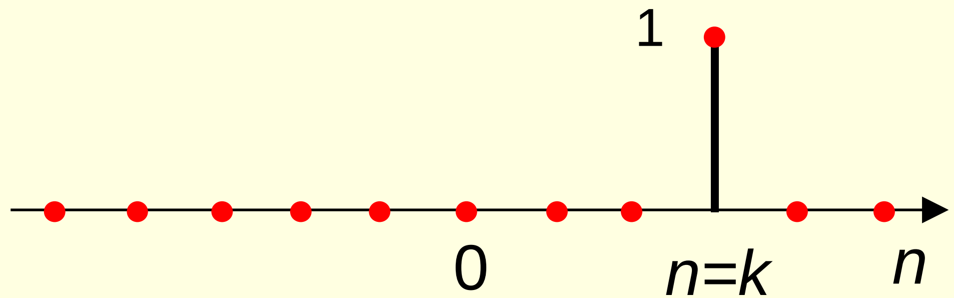
Sygnał ciągły a sygnał dyskretny w czasie - ciąg impulsowy Diraca

Impuls jednostkowy:

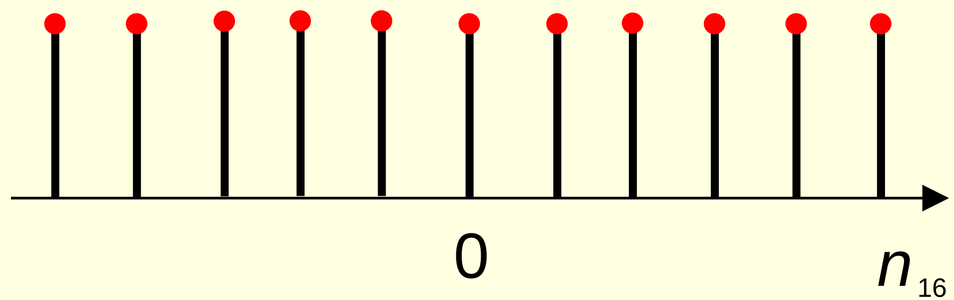
$$\delta(n)=\begin{cases}1 & dla \quad n=0\\ 0 & dla \quad n\neq 0\end{cases}$$



$$\delta(n-k)$$



$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(n-k)$$



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Sygnał ciągły a sygnał dyskretny

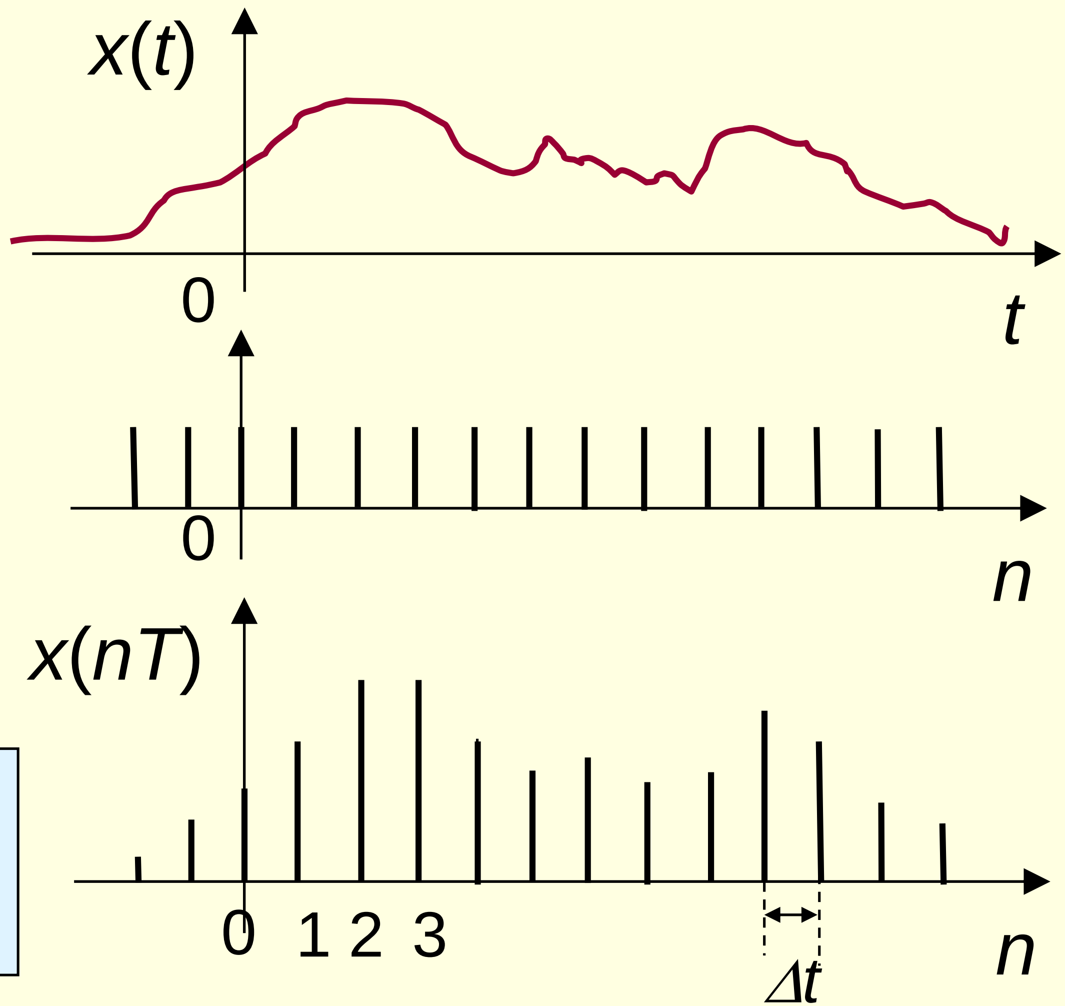
$$x(t)$$

x

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(n-k)$$

=

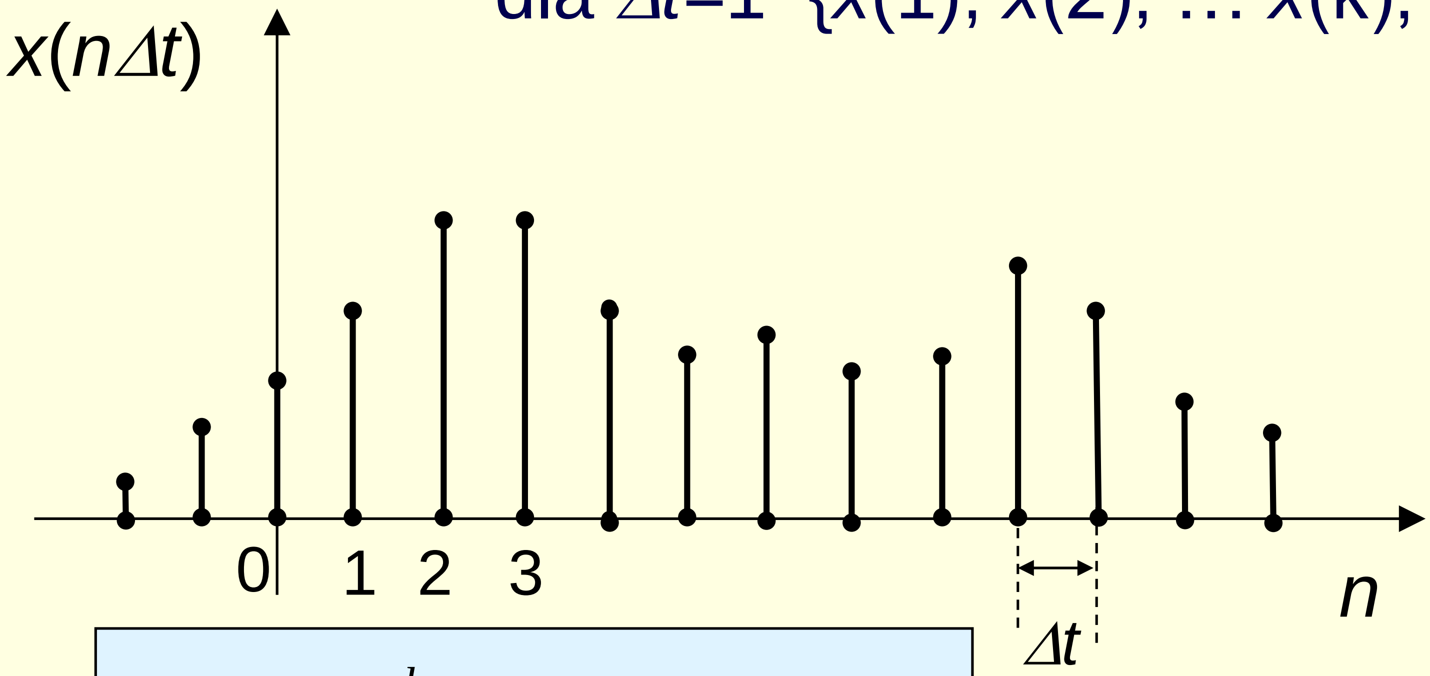
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(t)\delta(n-k)$$



Definicja sygnału dyskretnego

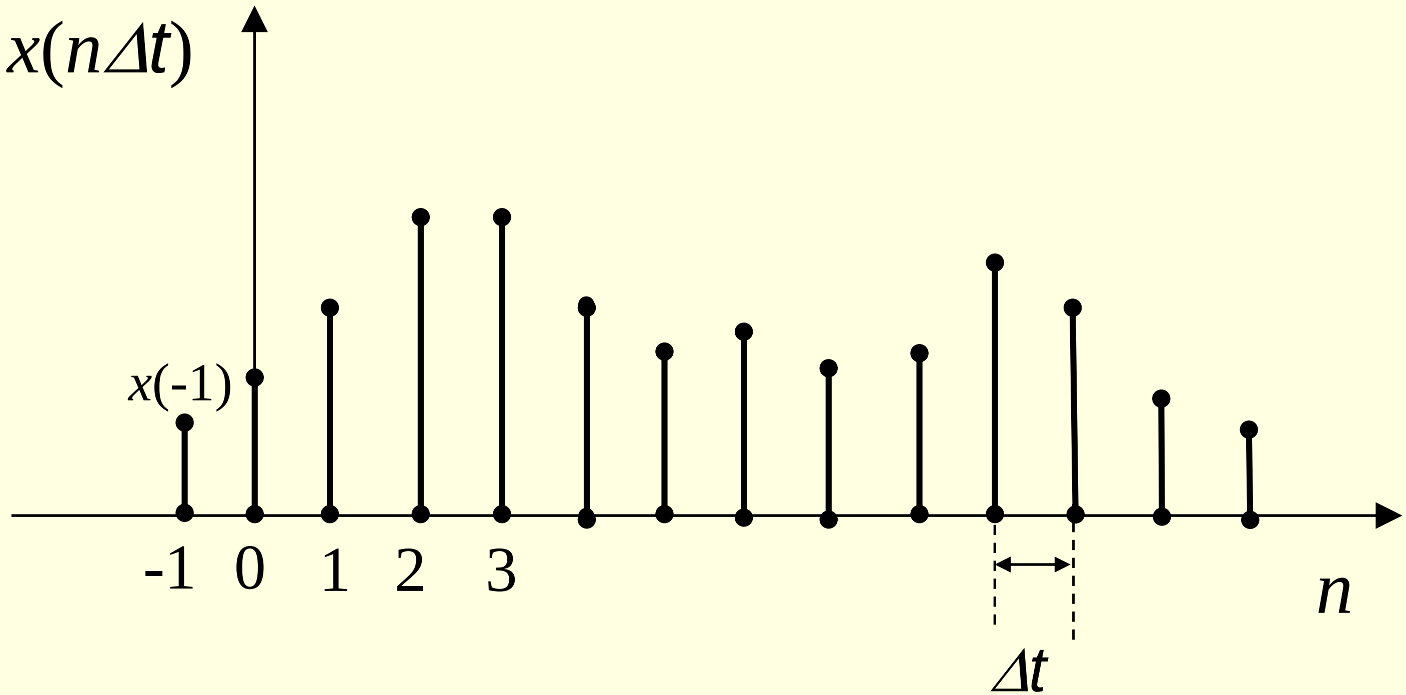
Sygnał dyskretny jest ciągiem impulsowym $\{x(n\Delta t)\}$

dla $\Delta t=1$ $\{x(1), x(2), \ldots\ x(k), \ldots\}$



$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Sygnał dyskretny - przykład



$$x(n) = x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n-0) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \ldots$$

Odpowiedź systemu liniowego na pobudzenie sygnałem dyskretnym

Sygnał wejściowy $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Odpowiedź impulsowa:

$$h(n) = H[\delta(n)]$$

Odpowiedź systemu na sygnał wejściowy $x(n)$ obliczamy korzystając z zasady superpozycji:

$$y(n) = H\left[\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)H[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Odpowiedź systemu liniowego na pobudzenie sygnałem dyskretnym

Sygnał wejściowy $x(n)$:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}x(k)\,\delta(n-k)$$

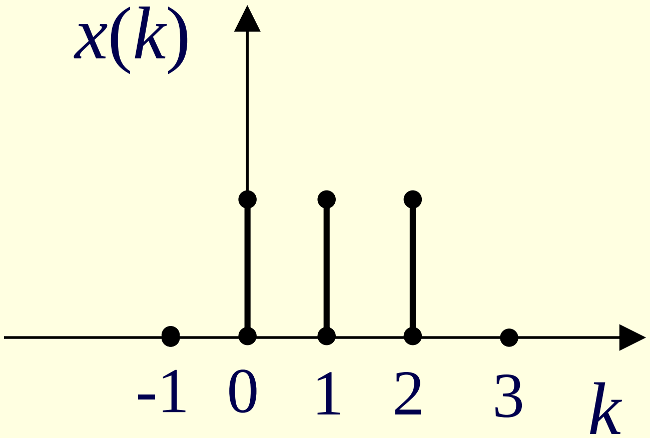
Sygnał wyjściowy $y(n)$:

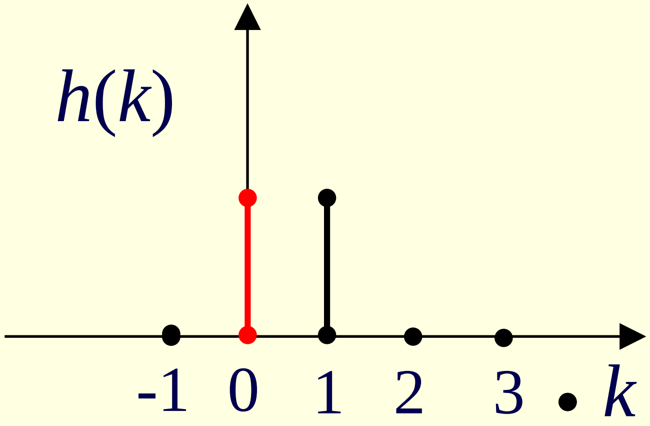
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}x(k)\,h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}x(n-k)\,h(k)$$

Przykład splotu

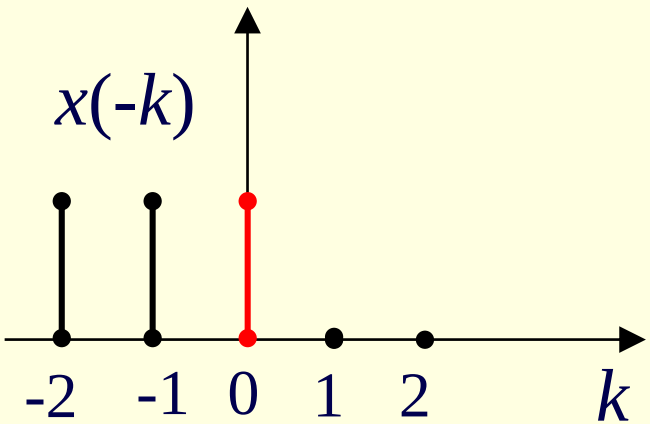
$$x(n) = [1,\ 1,\ 1]$$

$$h(n) = [1,\ 1]$$





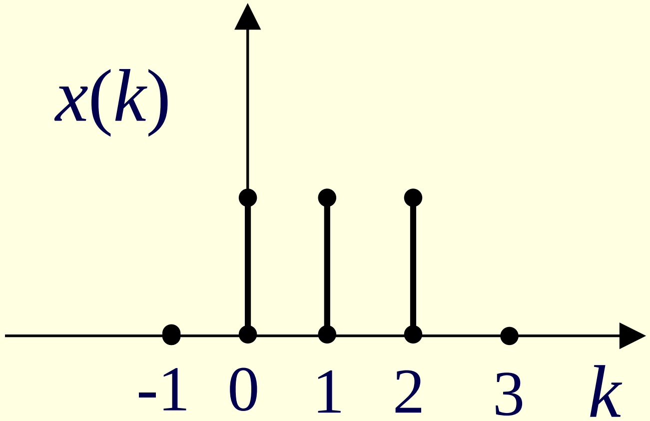
$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)}$$

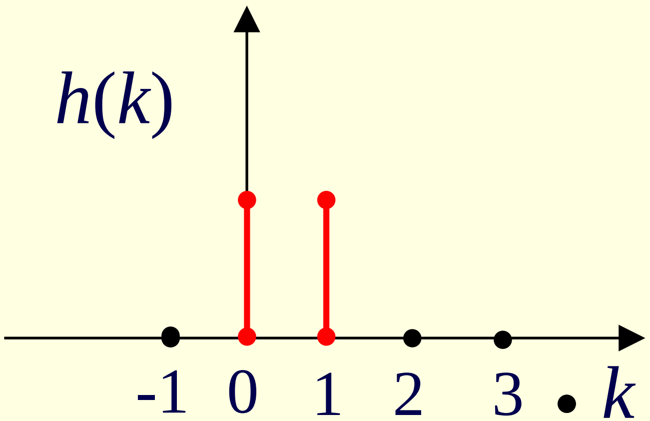


$$\boxed{y(0) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(-k)h(k) = x(-0)h(0) = 1}$$

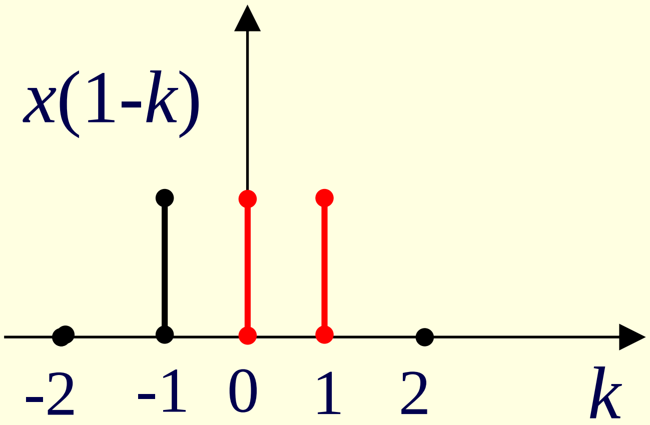
Przykład splotu

$$x(n) = [1,\ 1,\ 1]$$
$$h(n) = [1,\ 1]$$





$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$

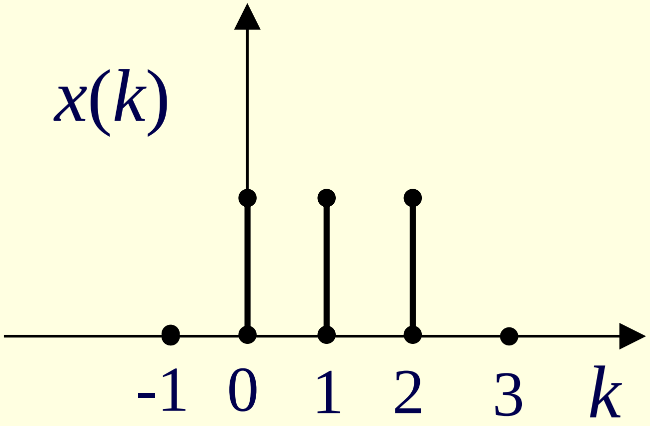


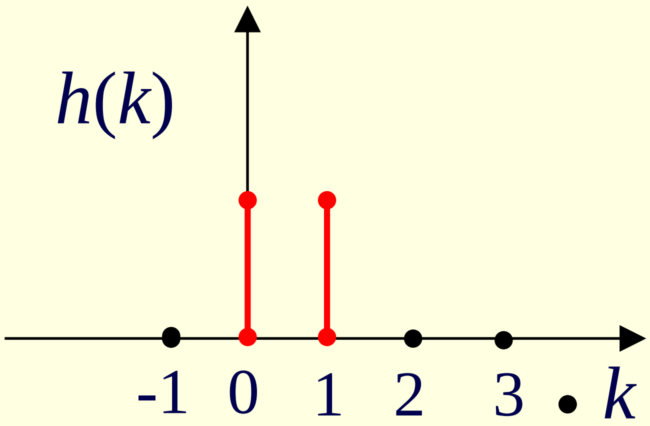
$$y(1) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(1-k)h(k) = x(1-0)h(0) + x(1-1)h(1) + $$
$$+ x(1-2)h(2) + \ldots = 1 + 1 + 0 = 2$$

Przykład splotu

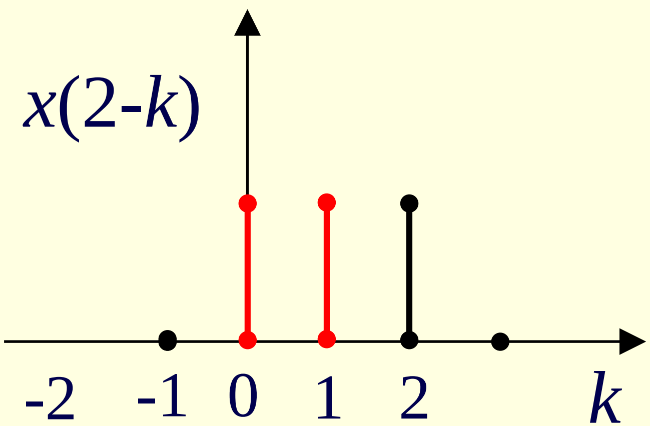
$$x(n) = [1,\ 1,\ 1]$$

$$h(n) = [1,\ 1]$$





$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$



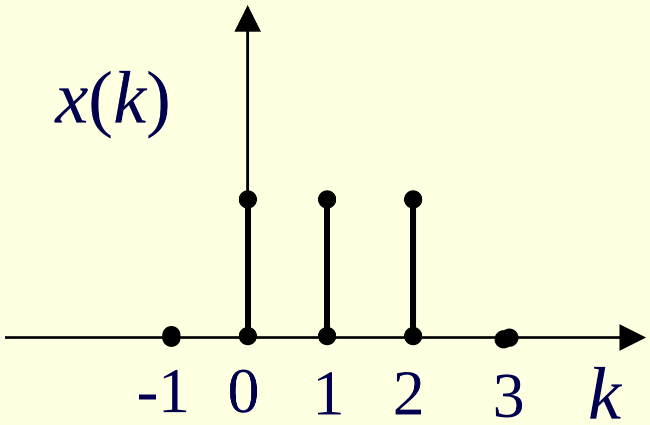
$$y(2) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(2-k)h(k) = x(2-0)h(0) + x(2-1)h(1) +$$

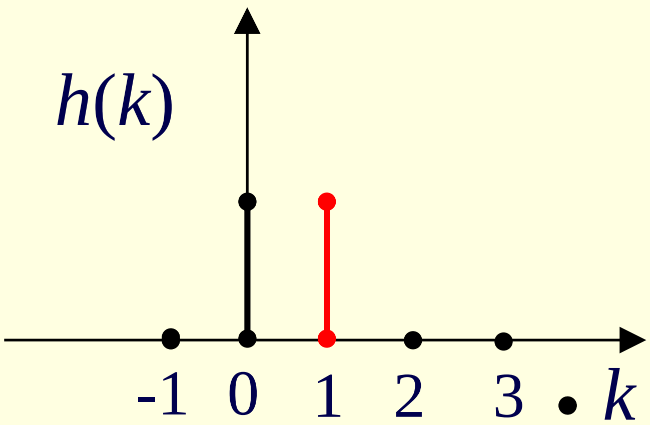
$$+ x(2-2)h(2) + \ldots = 1 + 1 + 0 = 2$$

Przykład splotu

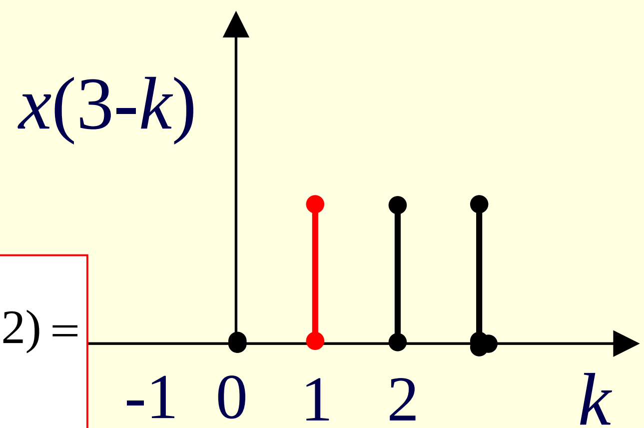
$$x(n) = [1,\ 1,\ 1]$$

$$h(n) = [1,\ 1]$$



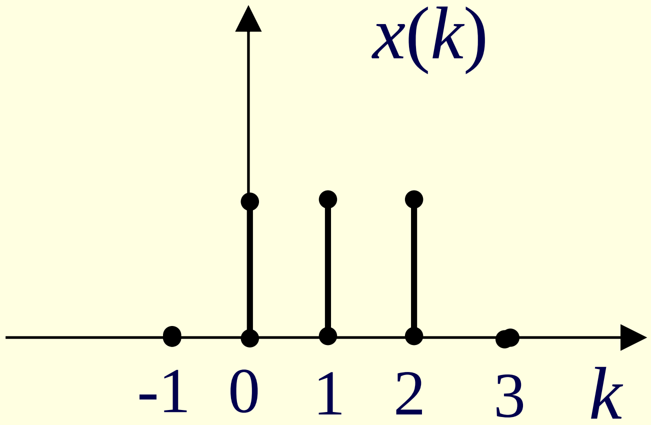


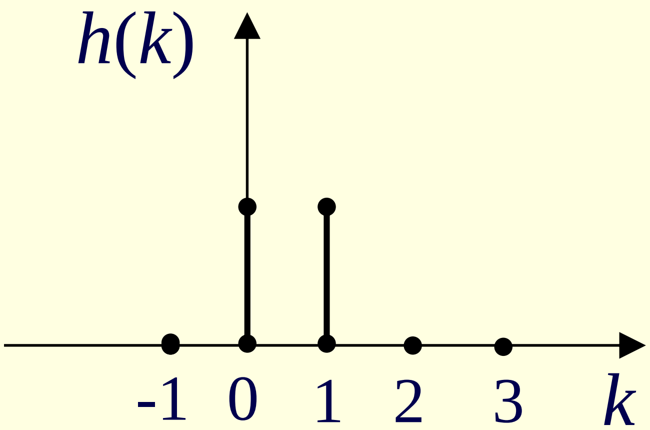
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)\,h(k)$$



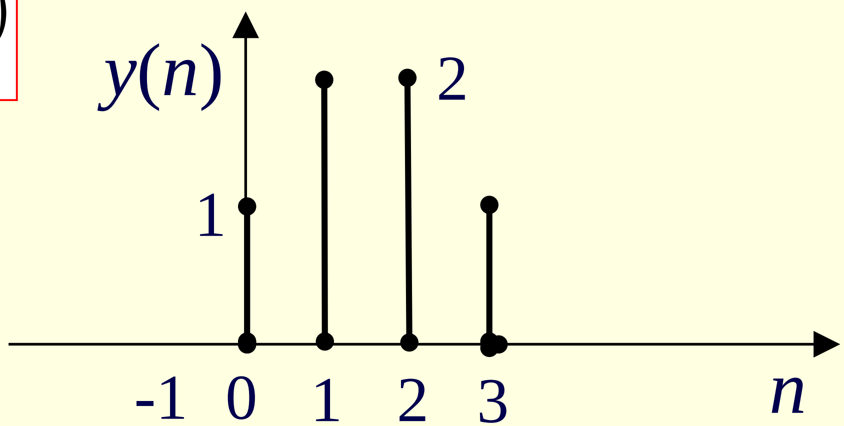
$$y(3) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(3-k)\,h(k) = x(3-0)h(0) + x(3-1)h(1) + x(3-2)h(2) =$$
$$= 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1$$

Wynik splotu





$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$



$$x(n) = [1\ \ 1\ \ 1]$$

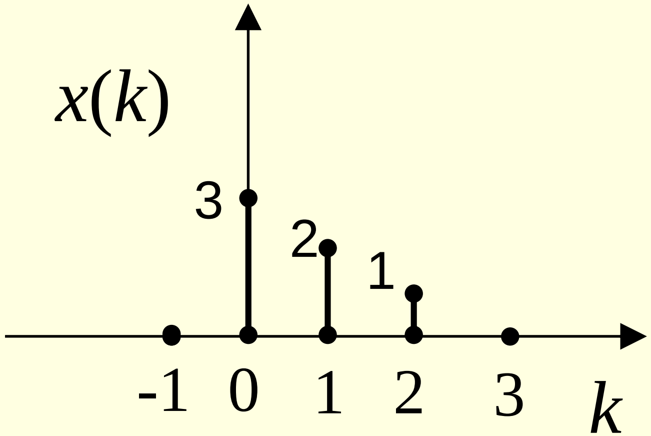
$$h(n) = [1\ \ 1]$$

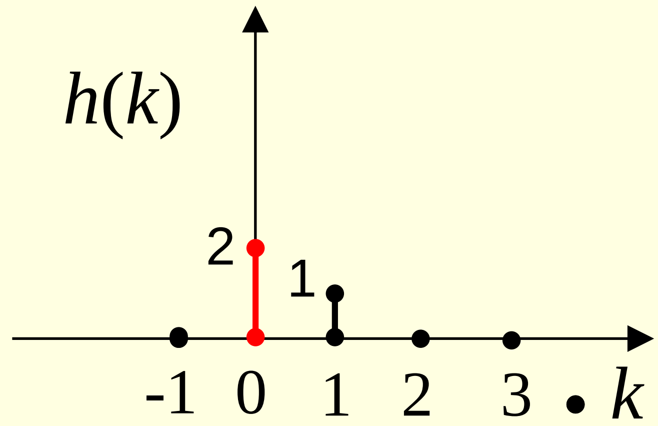
$$y(n) = x(n) * h(n) = [1\ 2\ 2\ 1]$$

Przykład splotu

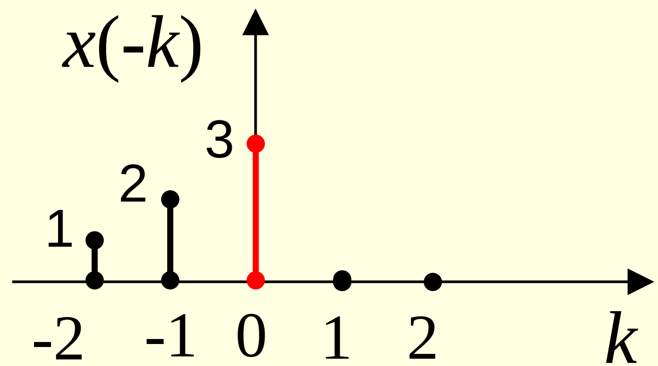
$$x(n) = [3,2,1]$$

$$h(n) = [2,1]$$





$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$

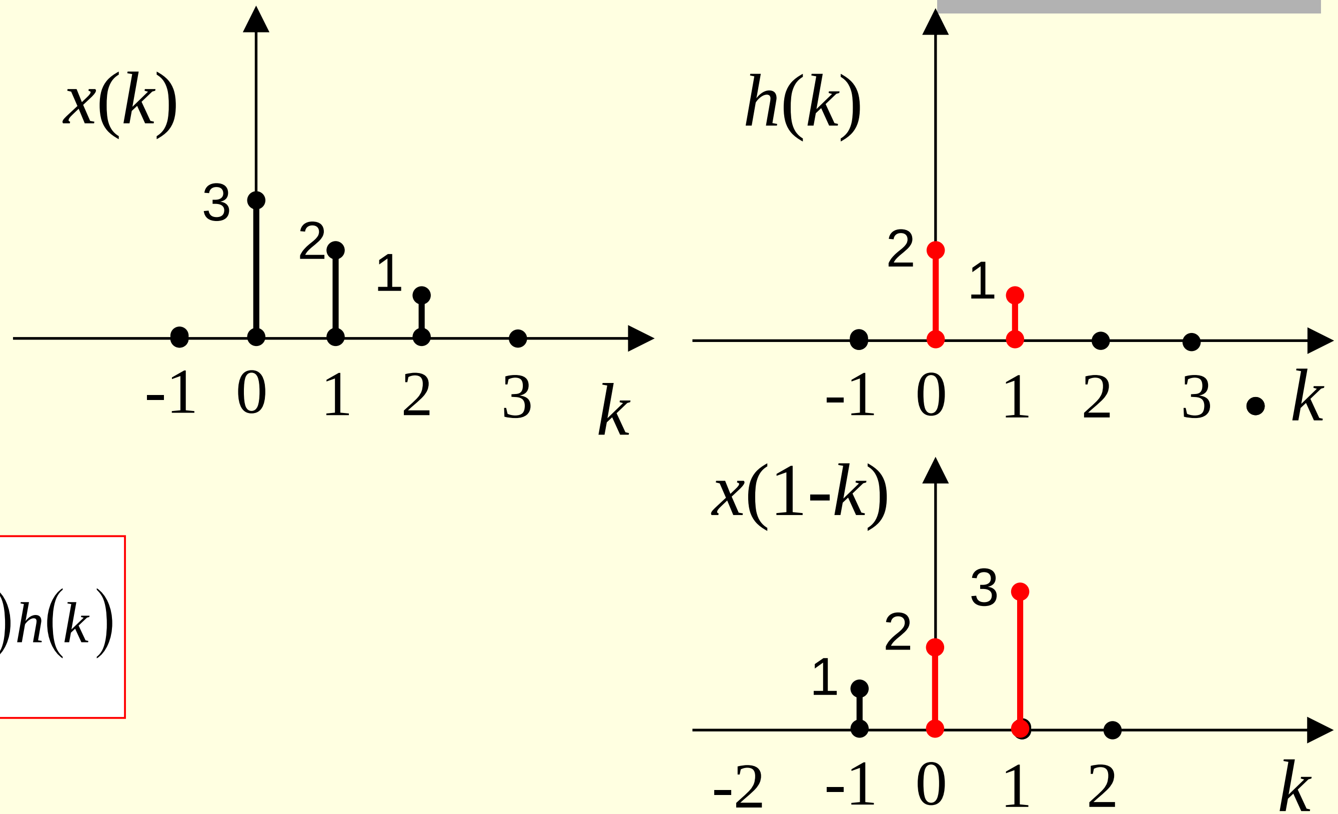


$$y(0) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(0-k)h(k) = x(-0)h(0) = 3 \cdot 2 = 6$$

Przykład splotu

$x(n) = [3,2,1]$

$h(n) = [2,1]$



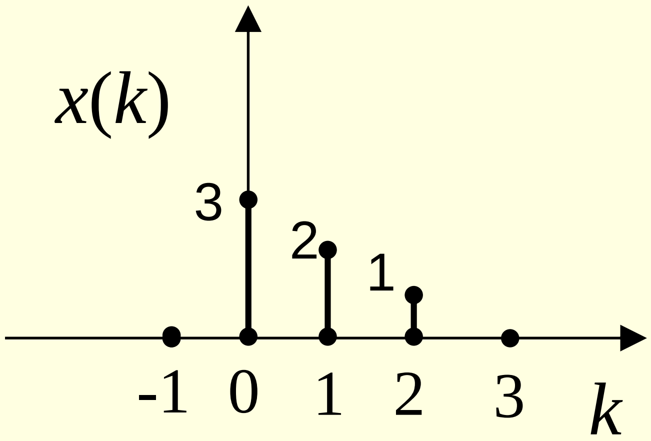
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$

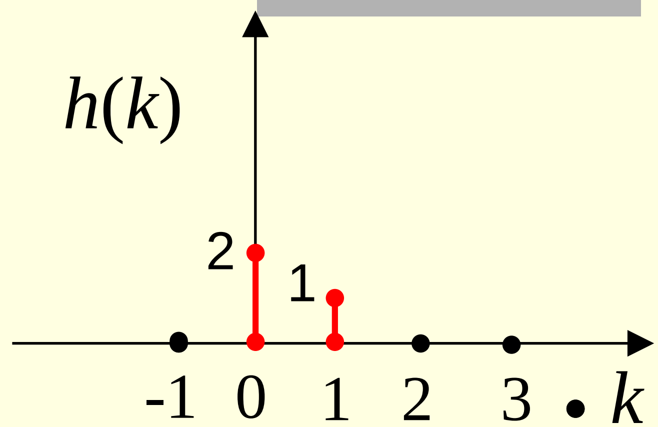
$$y(1) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(1-k)h(k) = x(1-0)h(0) + x(1-1)h(1) + x(1-2)h(2) = 4 + 3 + 0 = 7$$

Przykład splotu

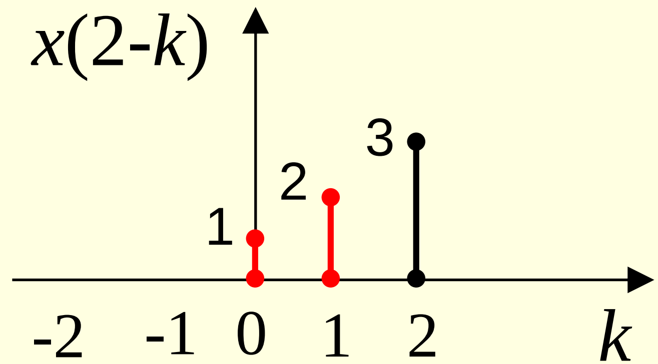
$x(n) = [3,2,1]$

$h(n) = [2,1]$





$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$

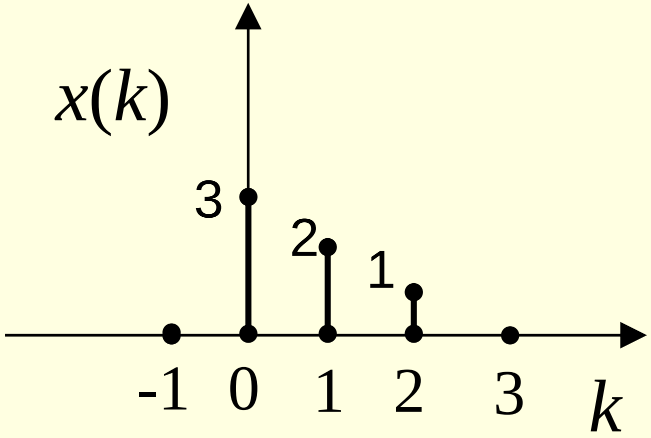


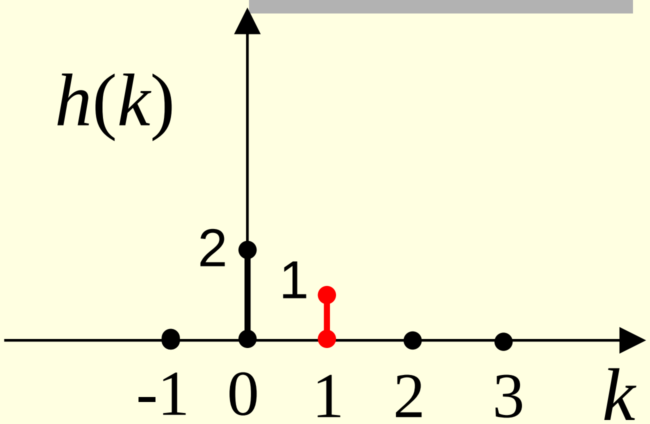
$$y(2) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(2-k)h(k) = x(2-0)h(0) + x(2-1)h(1) + x(2-2)h(2) + \ \dots = 4$$

Przykład splotu

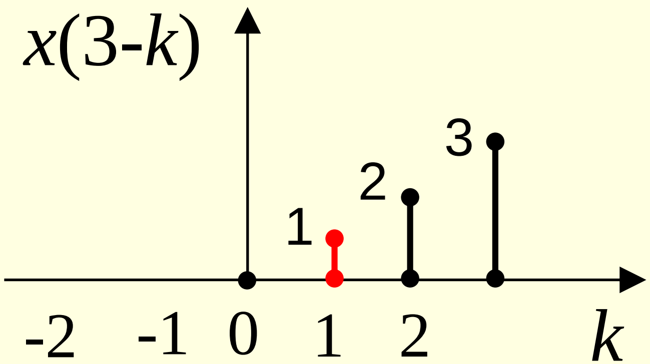
$x(n) = [3,2,1]$

$h(n) = [2,1]$



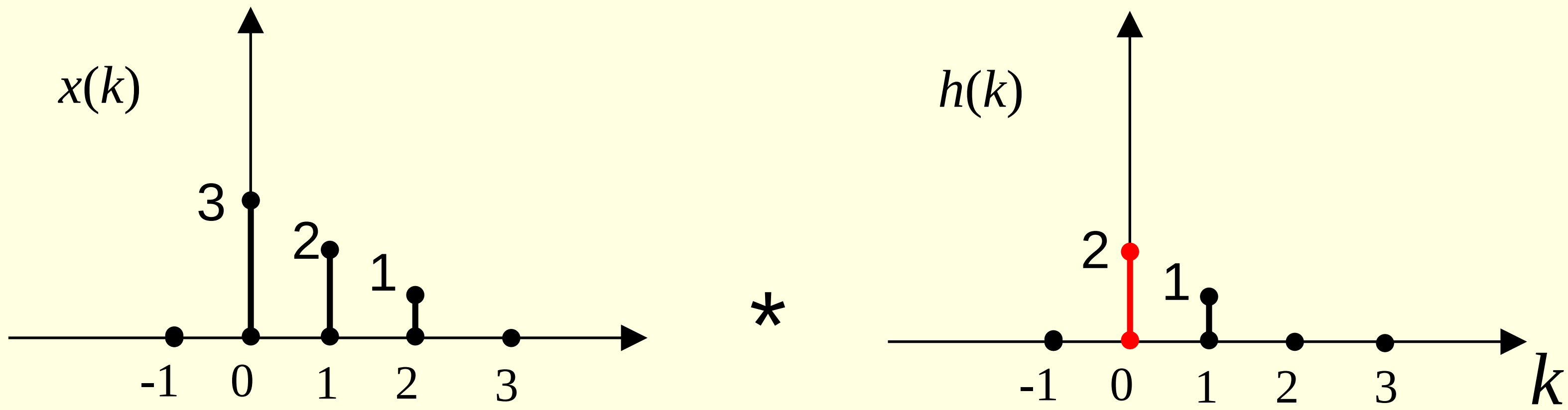


$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k)$$



$$y(3) = \sum_{k=0}^{k=\infty} x(3-k)h(k) = x(3-0)h(0) + x(3-1)h(1) + x(3-2)h(2) = 1$$

Wynik splotu



$x(n) = [3,2,1]$

$h(n) = [2,1]$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = [3,2,1] * [2,1] = [6,7,4,1]}$$

Splot (ang. Convolution)

Dla sygnałów ciągłych :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Dla sygnałów dyskretnych:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Warto spojrzeć na stronę internetową: www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html

Odpowiedź systemu liniowego na pobudzenie sygnałem okresowym

Niech sygnał wejściowy: $x(n) = e^{j\omega n}$

Sygnał wyjściowy $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{j\omega(n-k)} h(k) =$$

$$= e^{j\omega n} \boxed{\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-j\omega k} h(k)} = x(n)H(\omega)$$

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow H(\omega)e^{j\omega n}$$

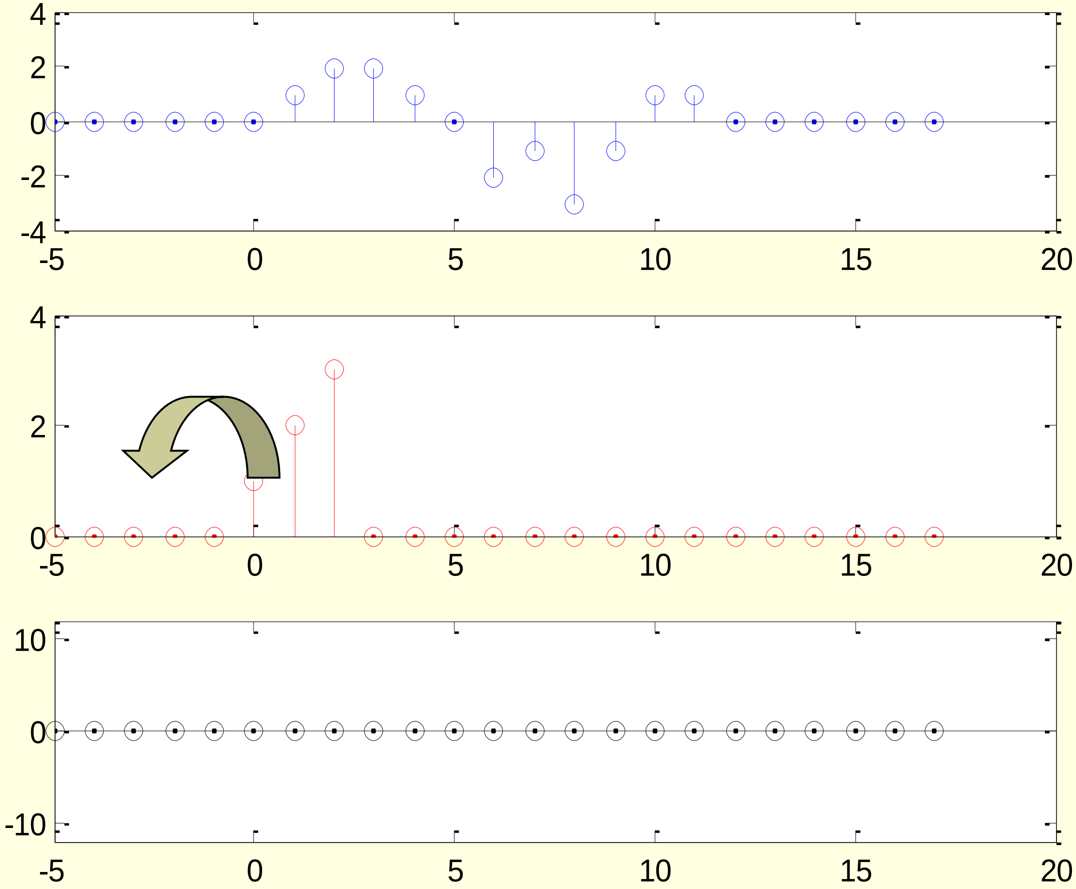
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



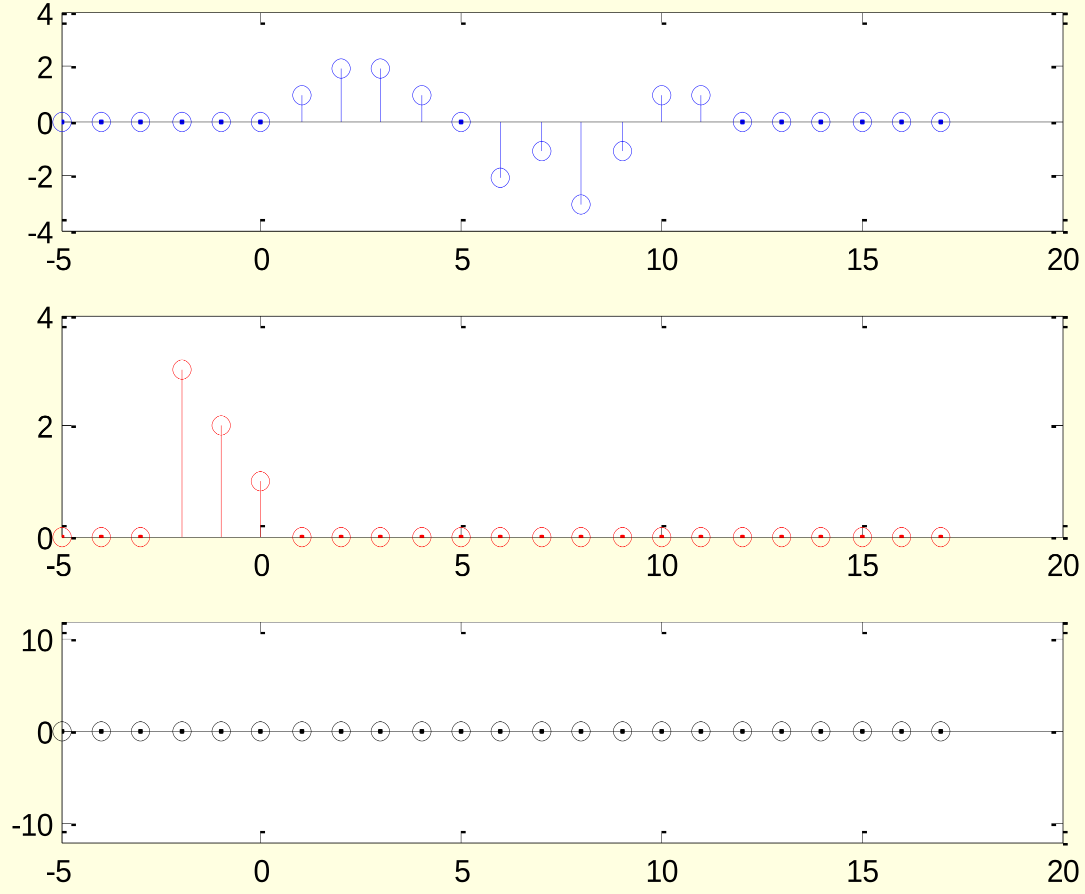
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



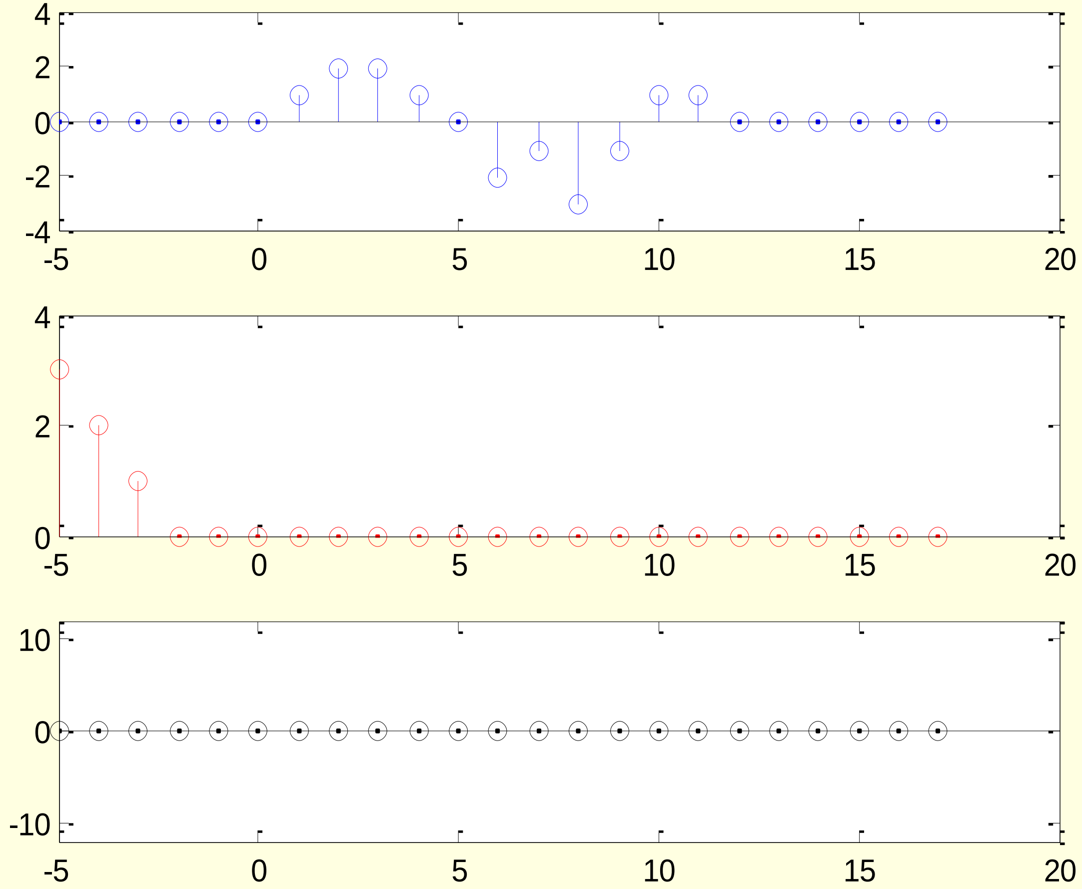
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



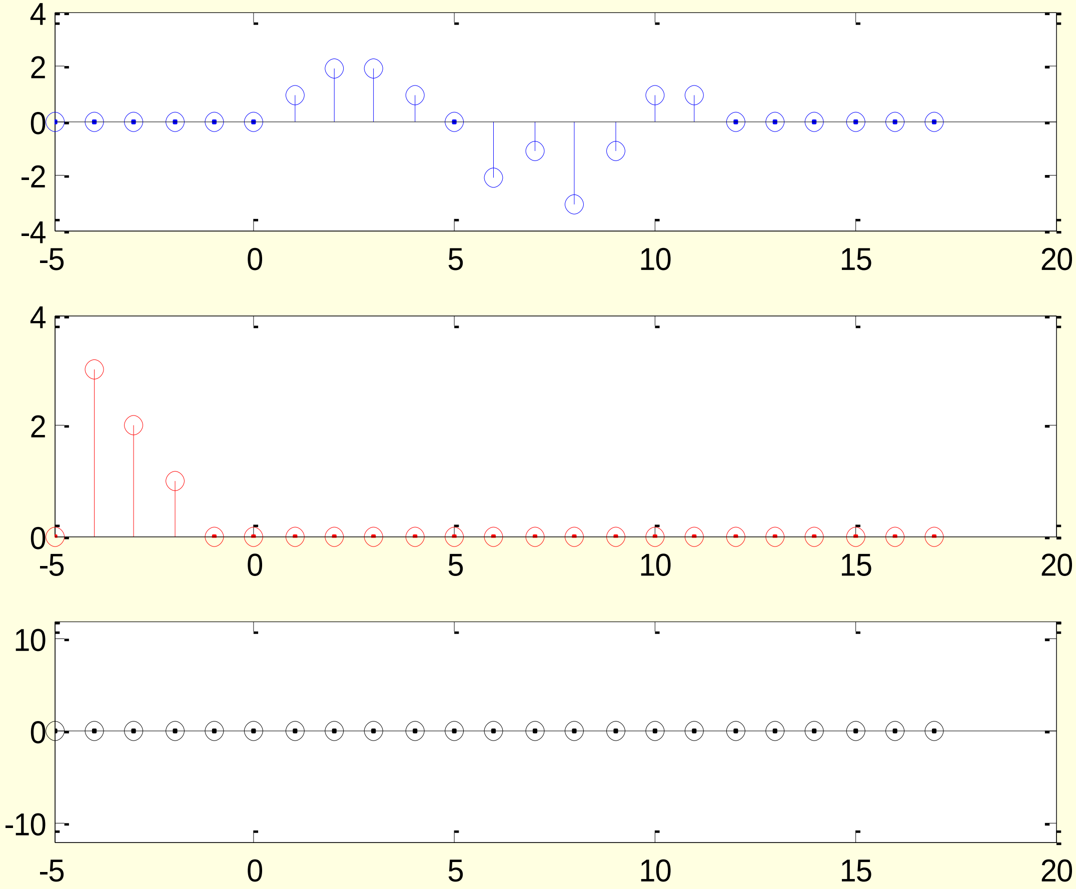
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



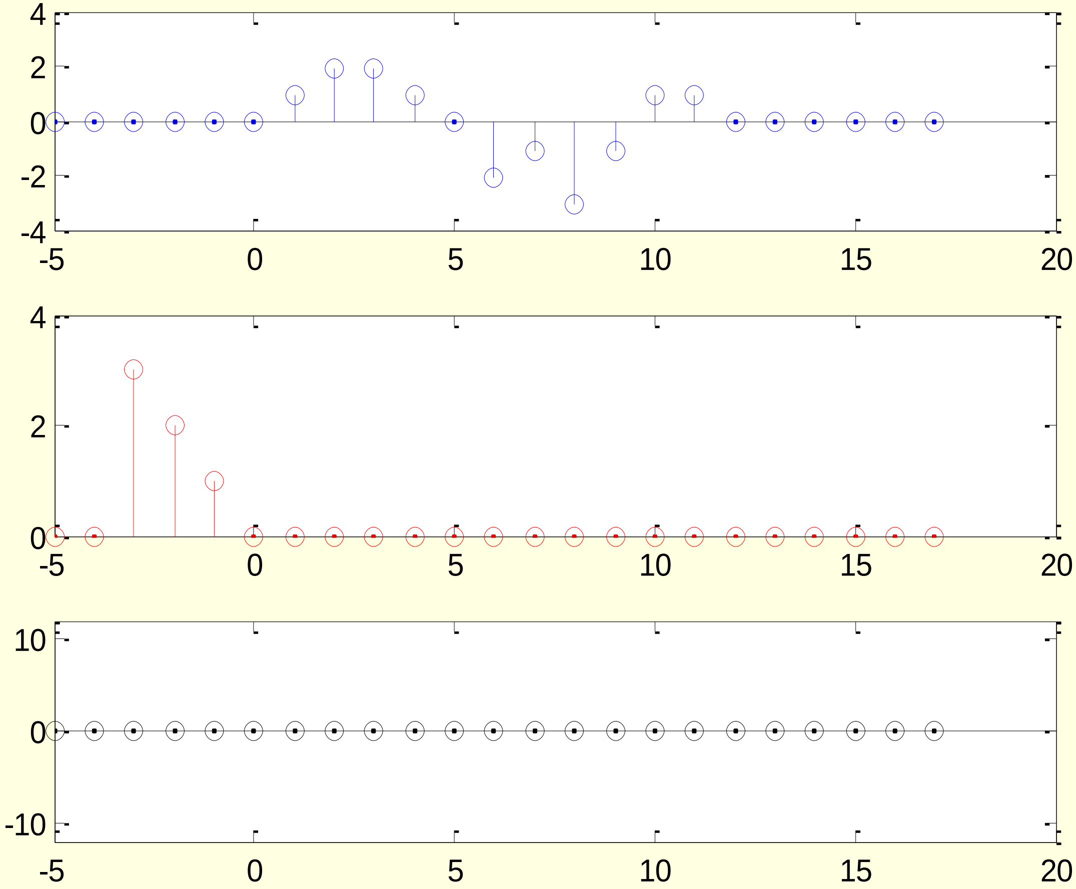
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

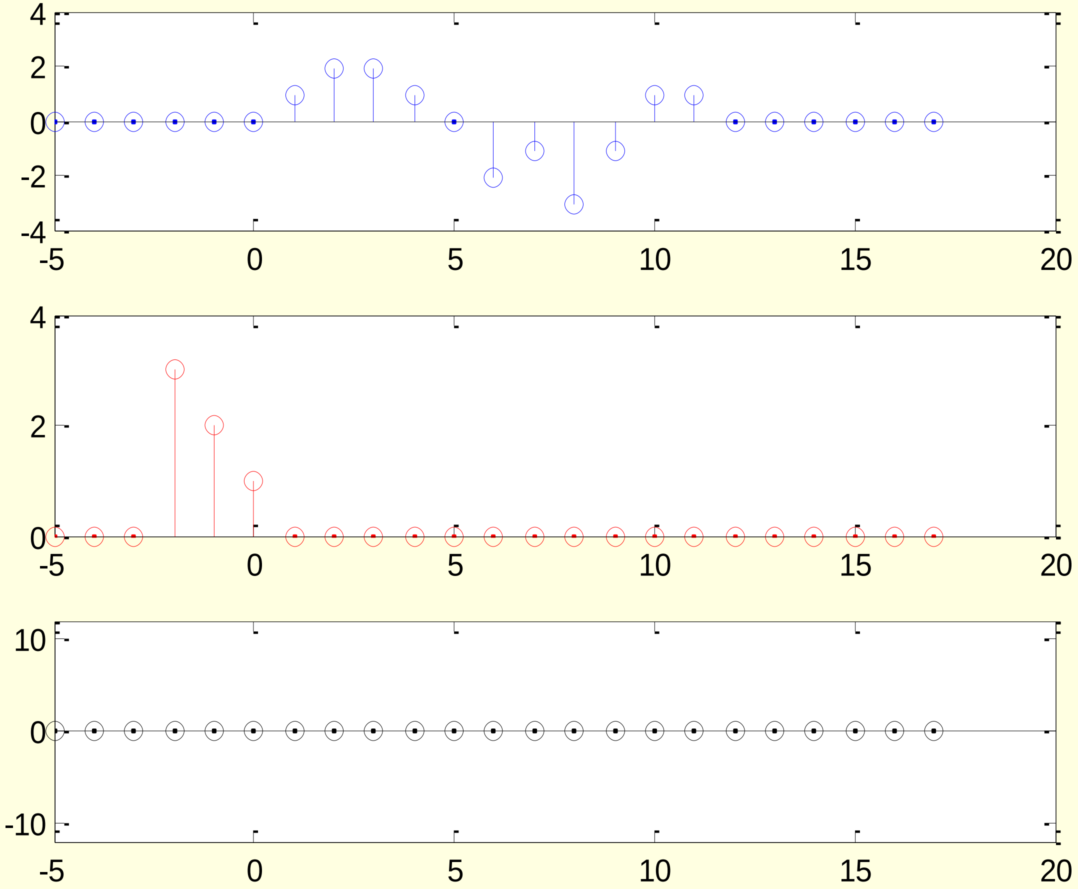
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

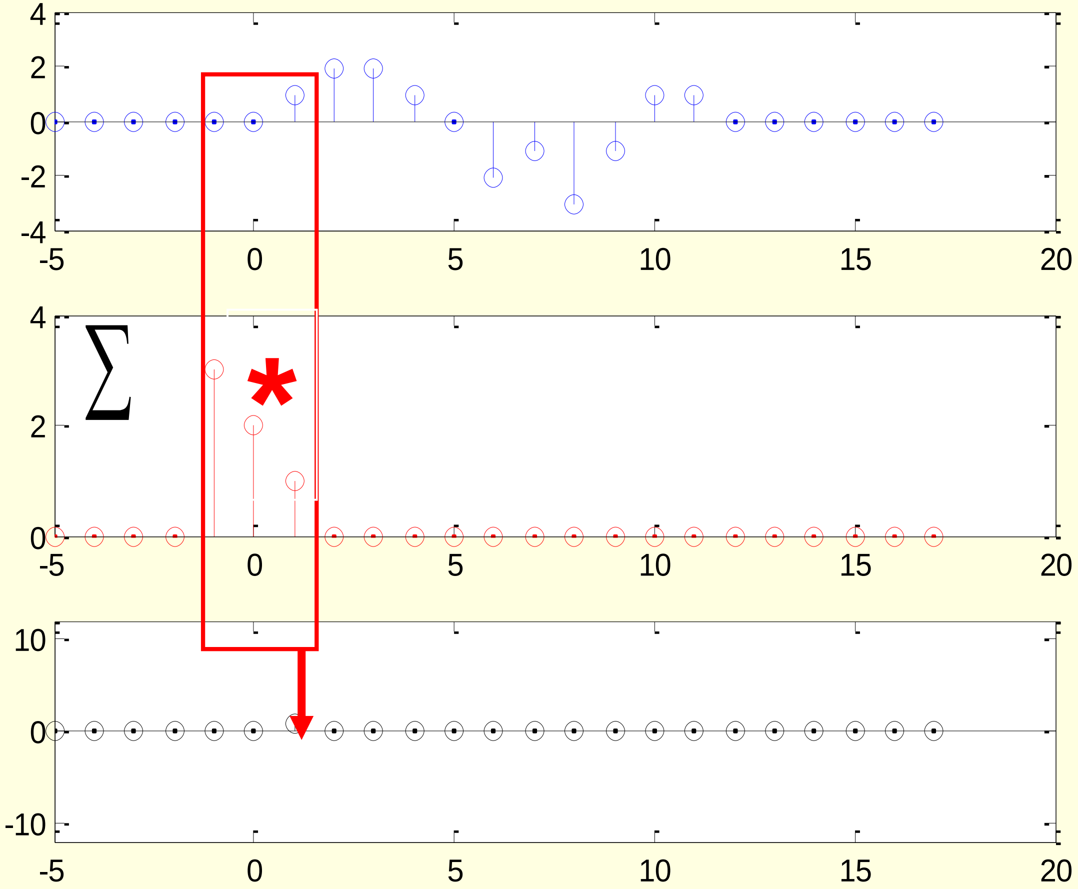
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

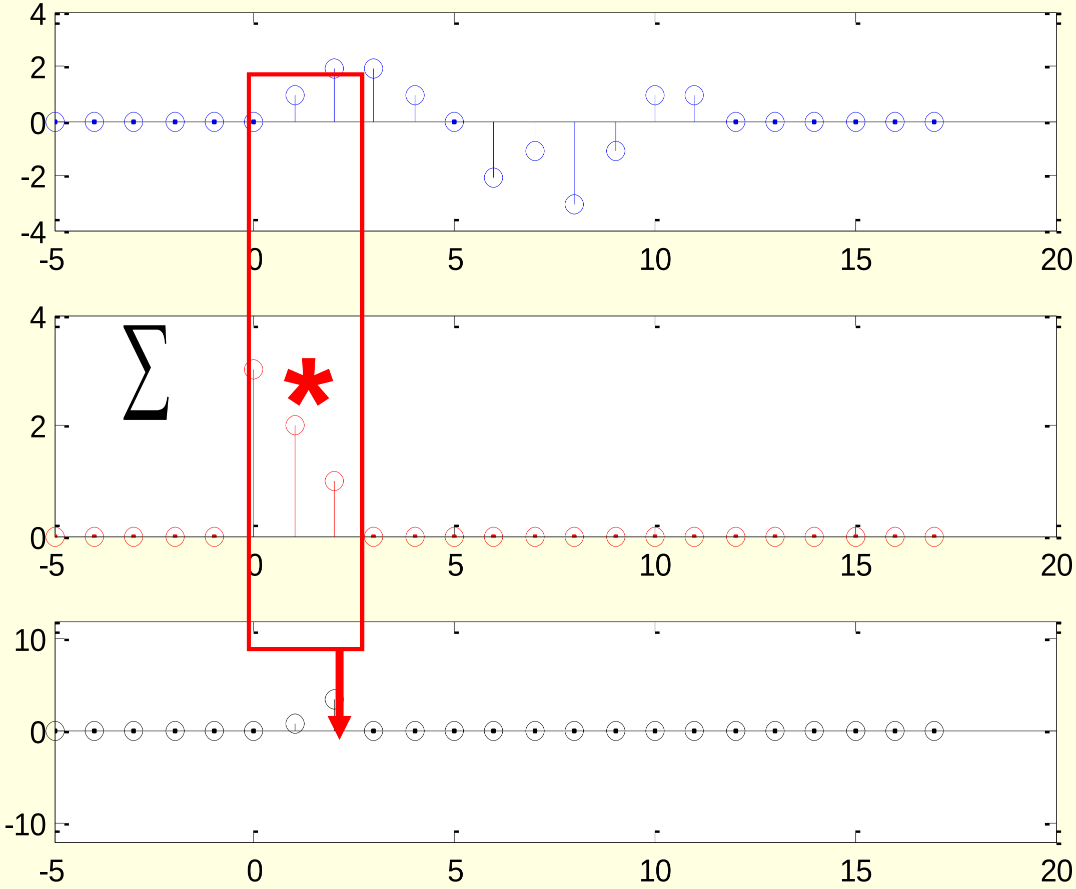
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



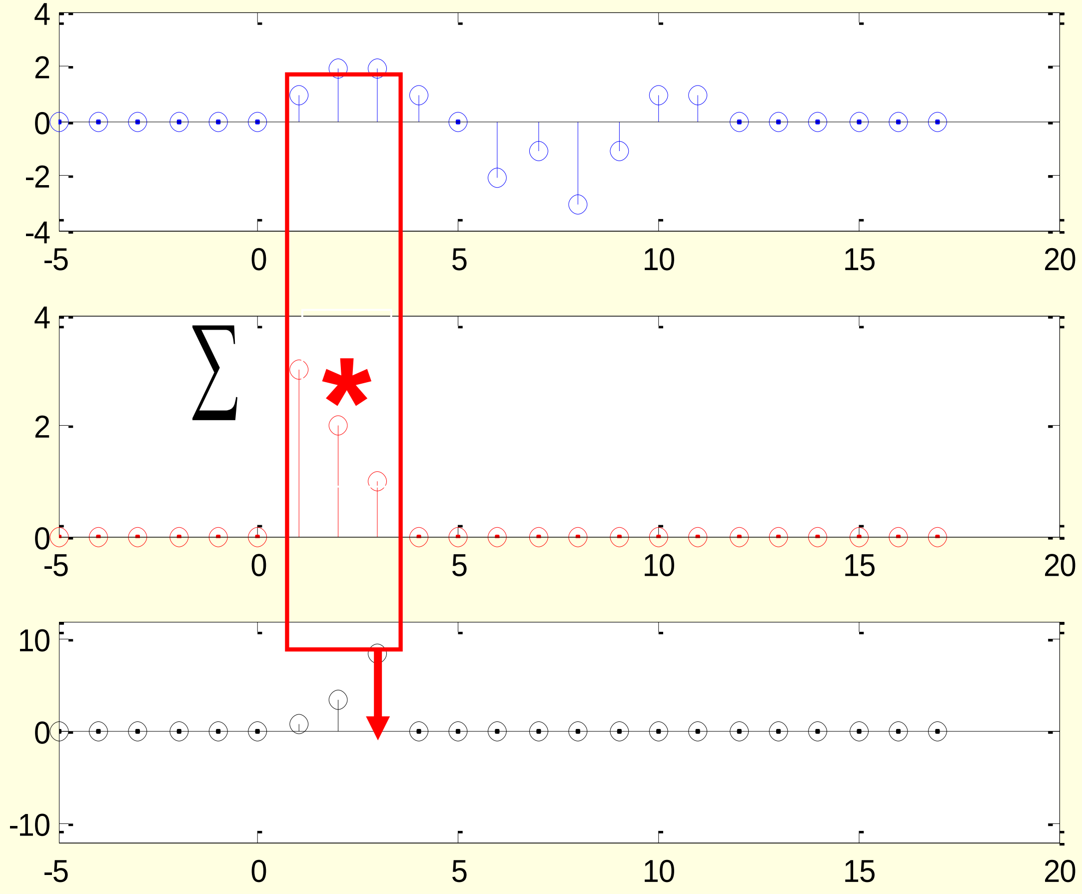
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

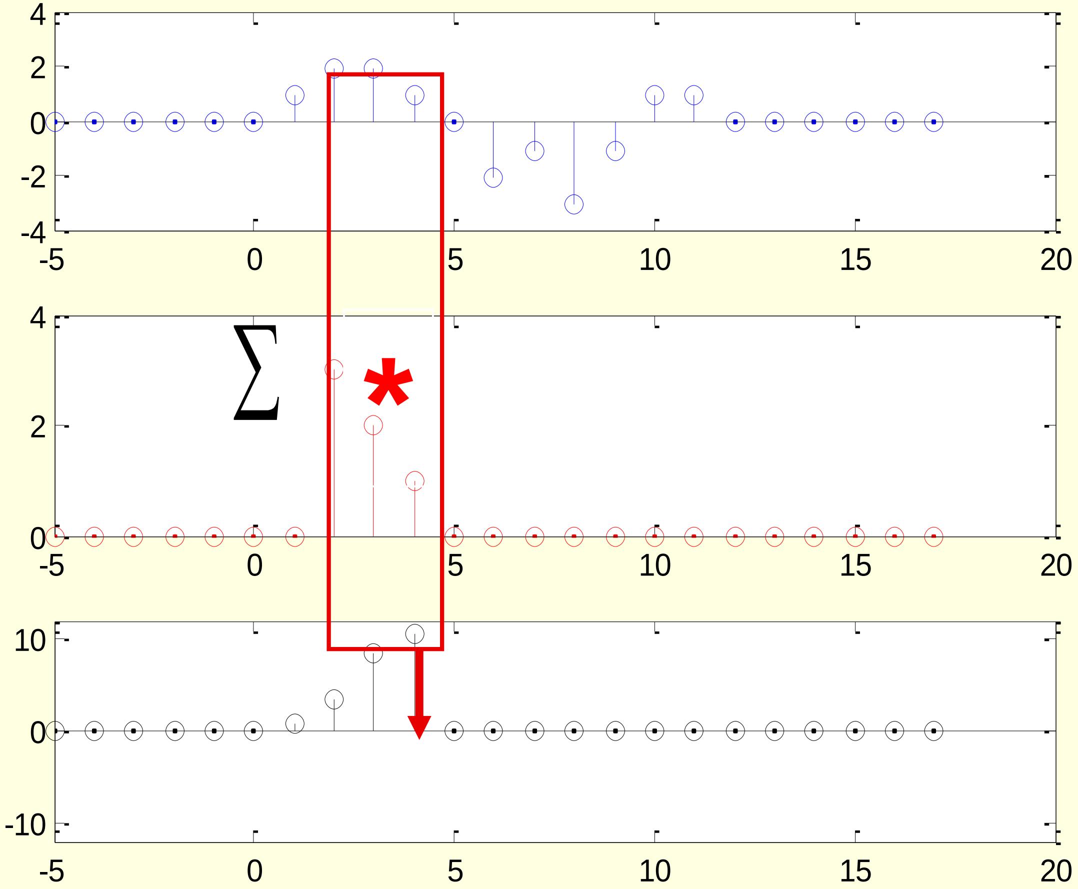
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

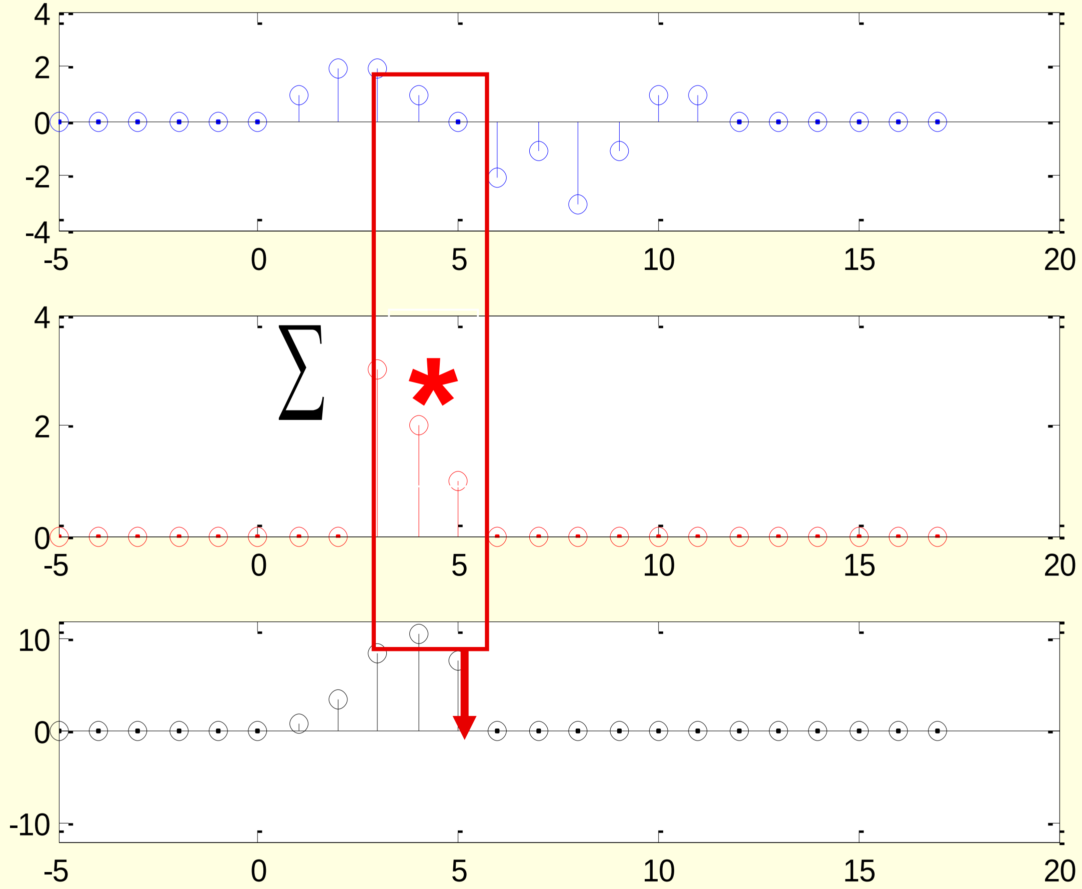
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

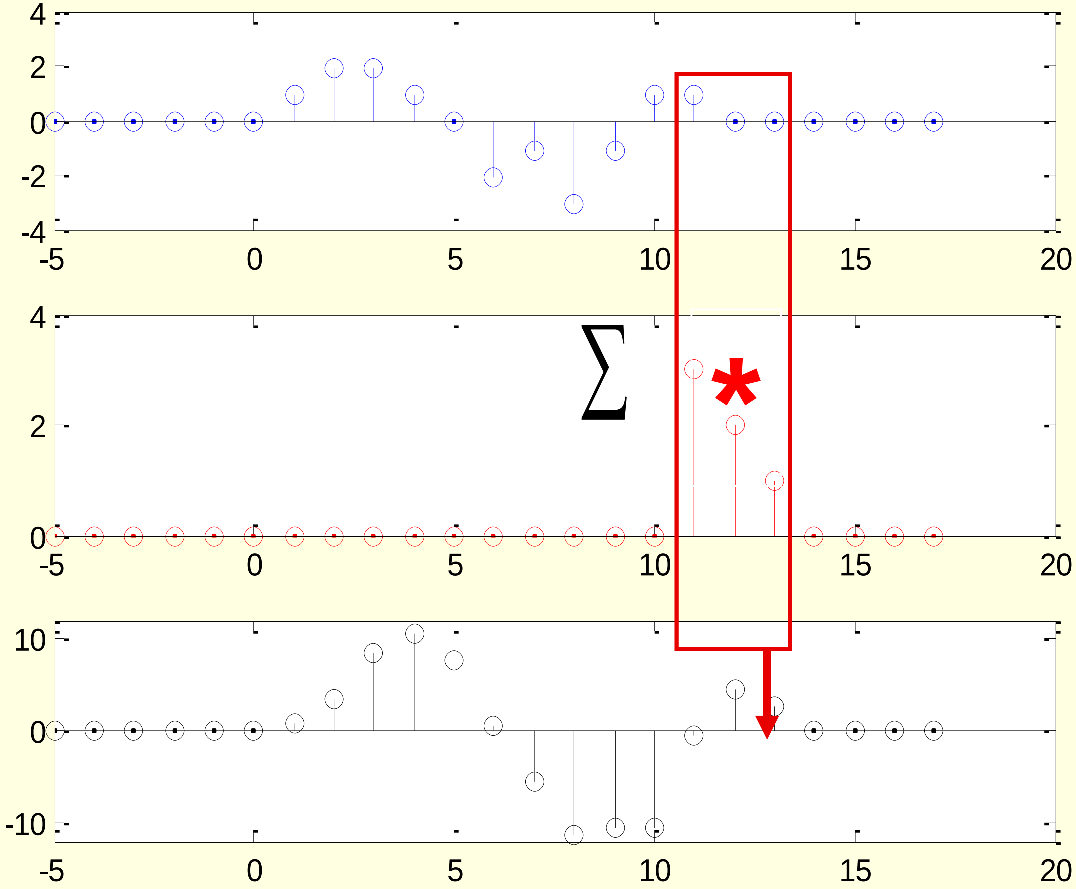
Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*

Sygnał *h*

Splot

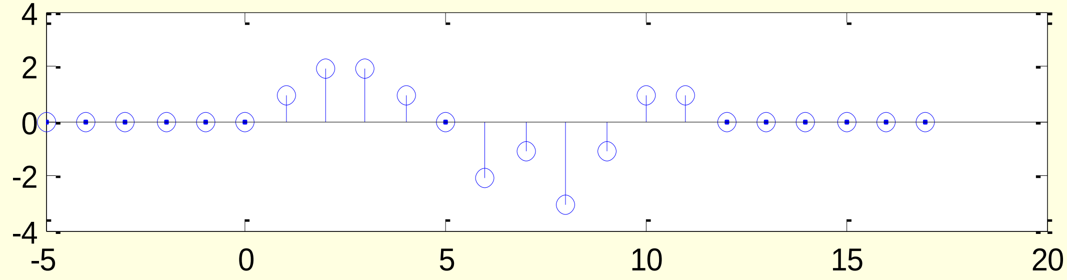


Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Splot (ang. Convolution)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

Sygnał *x*



Zwróć uwagę na długość sygnału wynikowego.

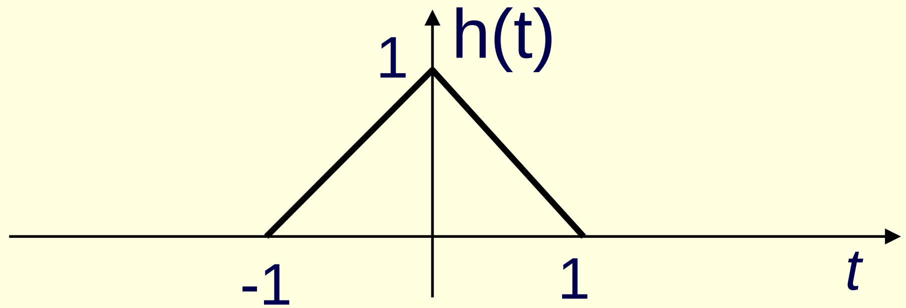
Porównaj sygnał wynikowy z sygnałem wejściowym.

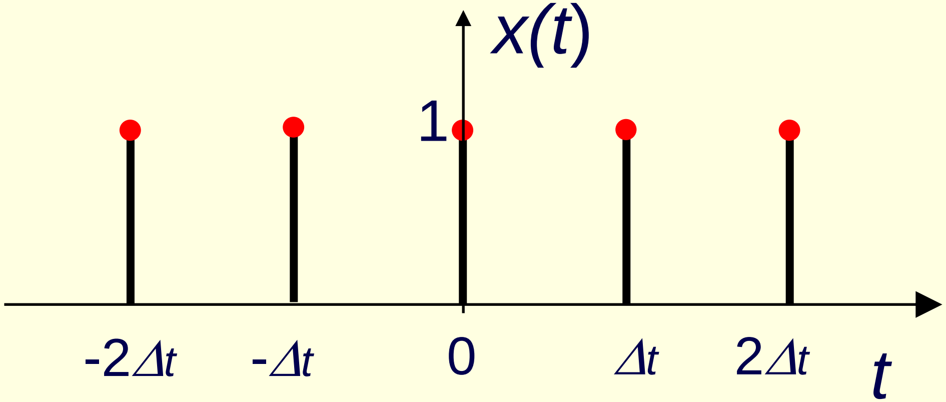
Splot

$$L = M + N - 1$$

Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Splot - przykład





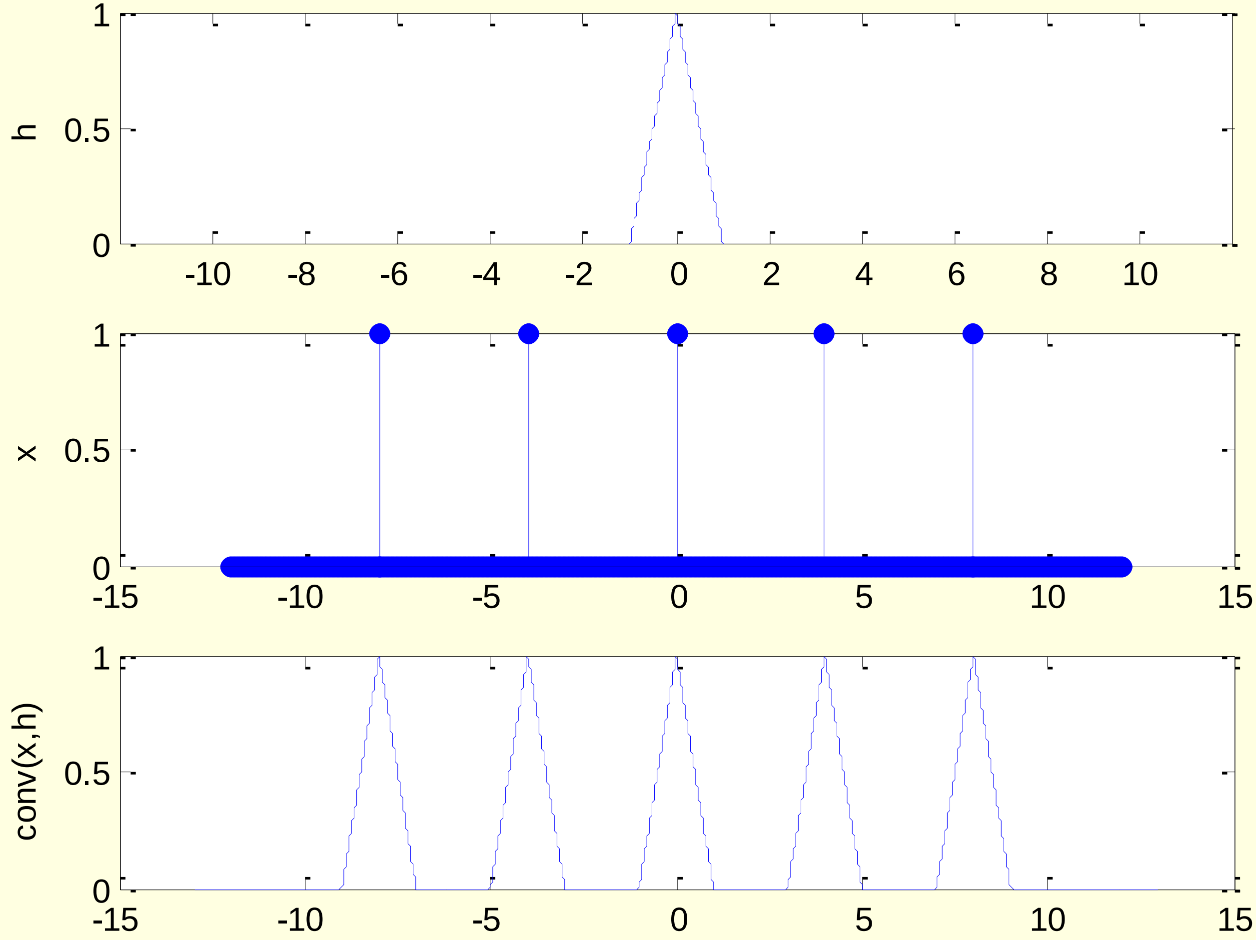
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Wyznacz $y(t)= x(t)* h(t)$, dla:

$\Delta t=4$, $\Delta t=2$, $\Delta t=3/2$ i $\Delta t=1$

Splot - przykład

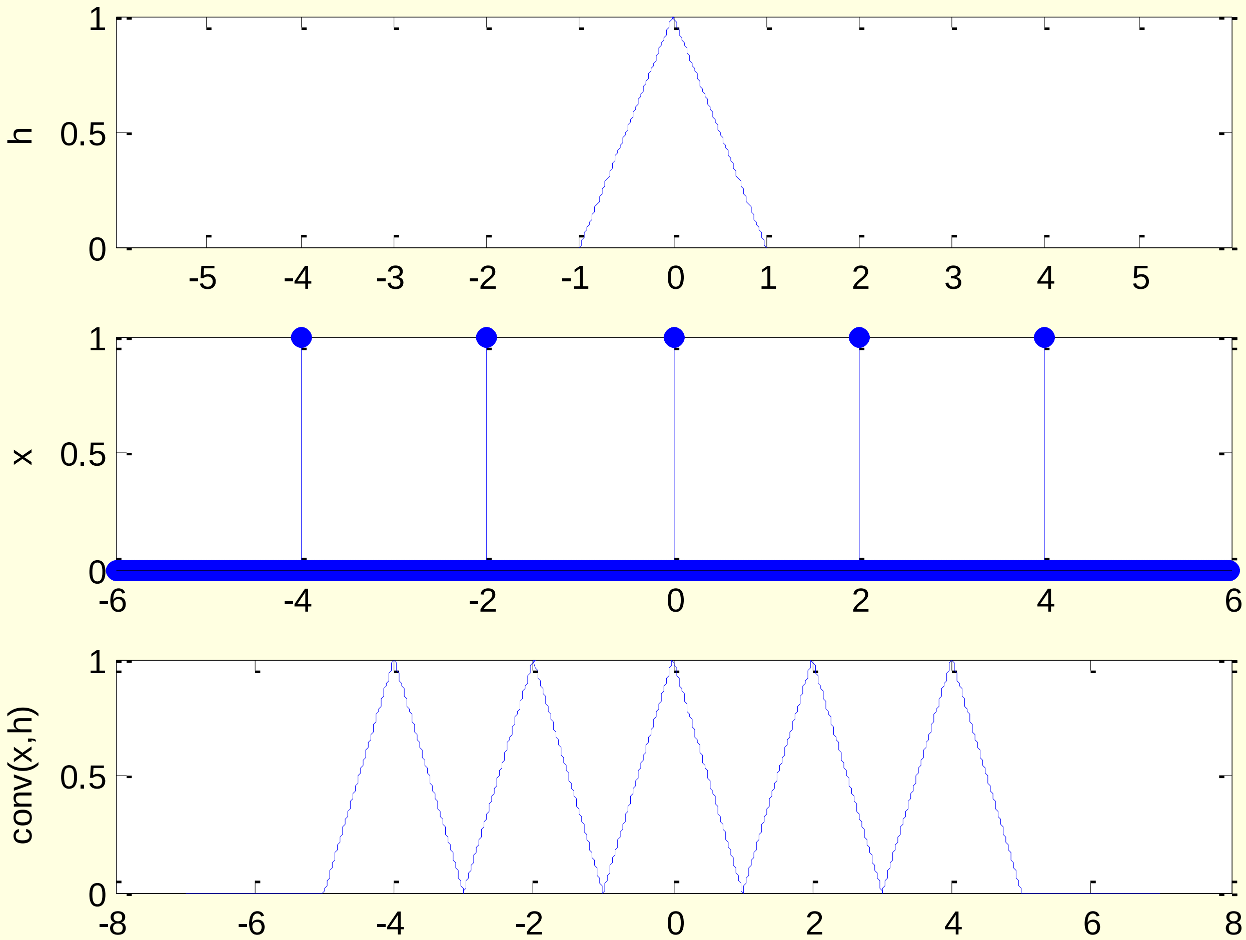
$\Delta t = 4$



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

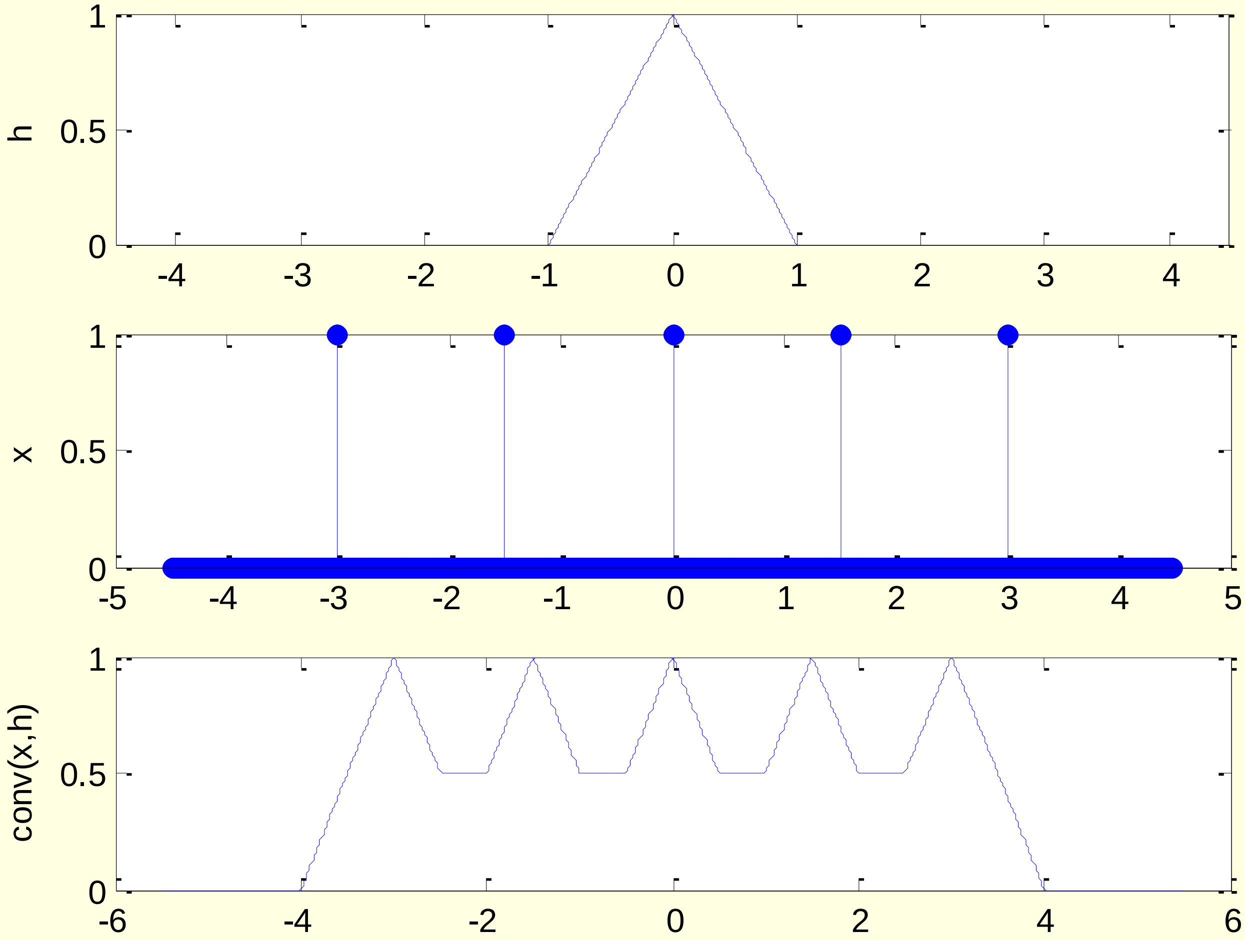
Splot - przykład

$\Delta t=2$



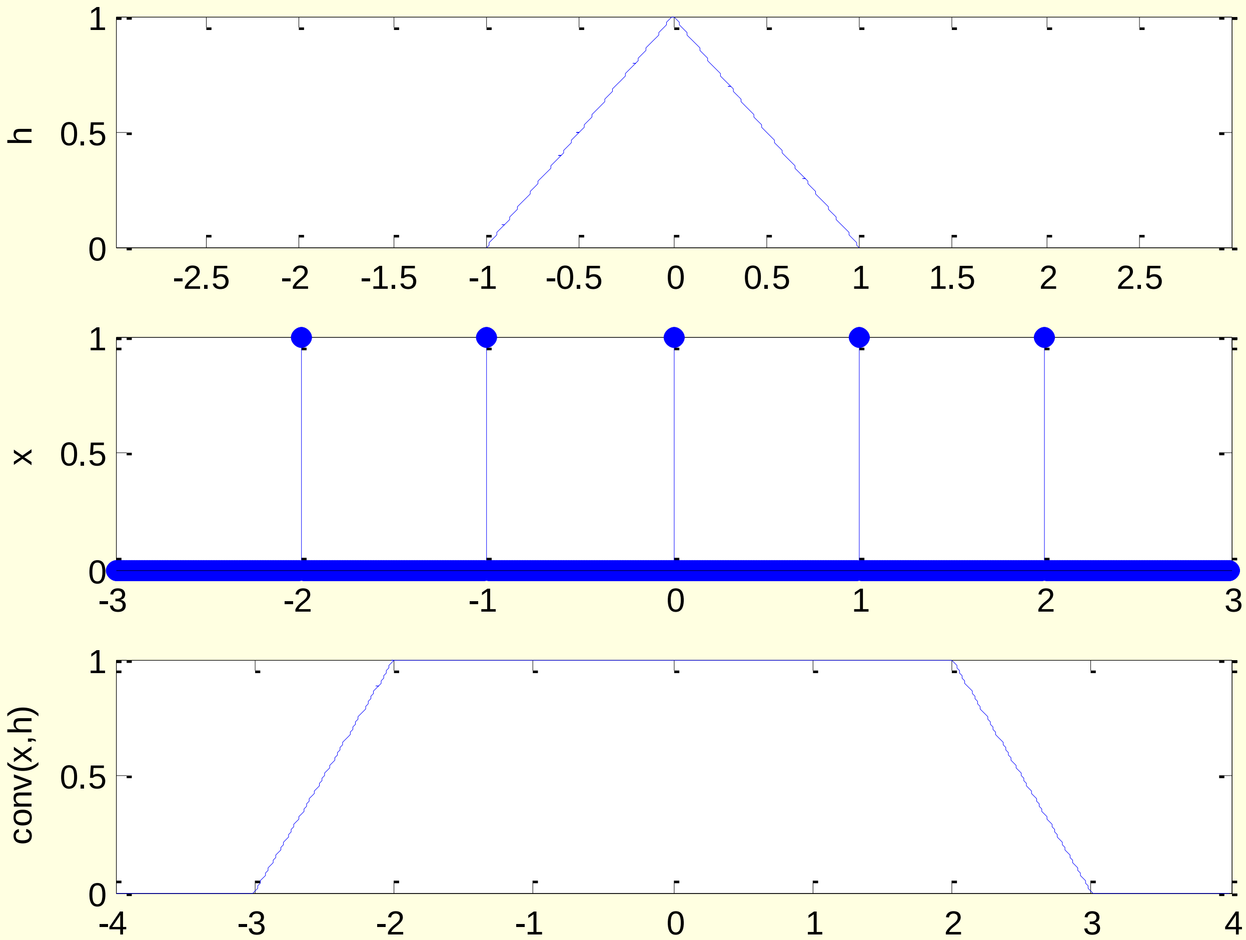
Splot - przykład

Δt=1.5



Splot - przykład

$\Delta t=1$



Splot

Równanie:

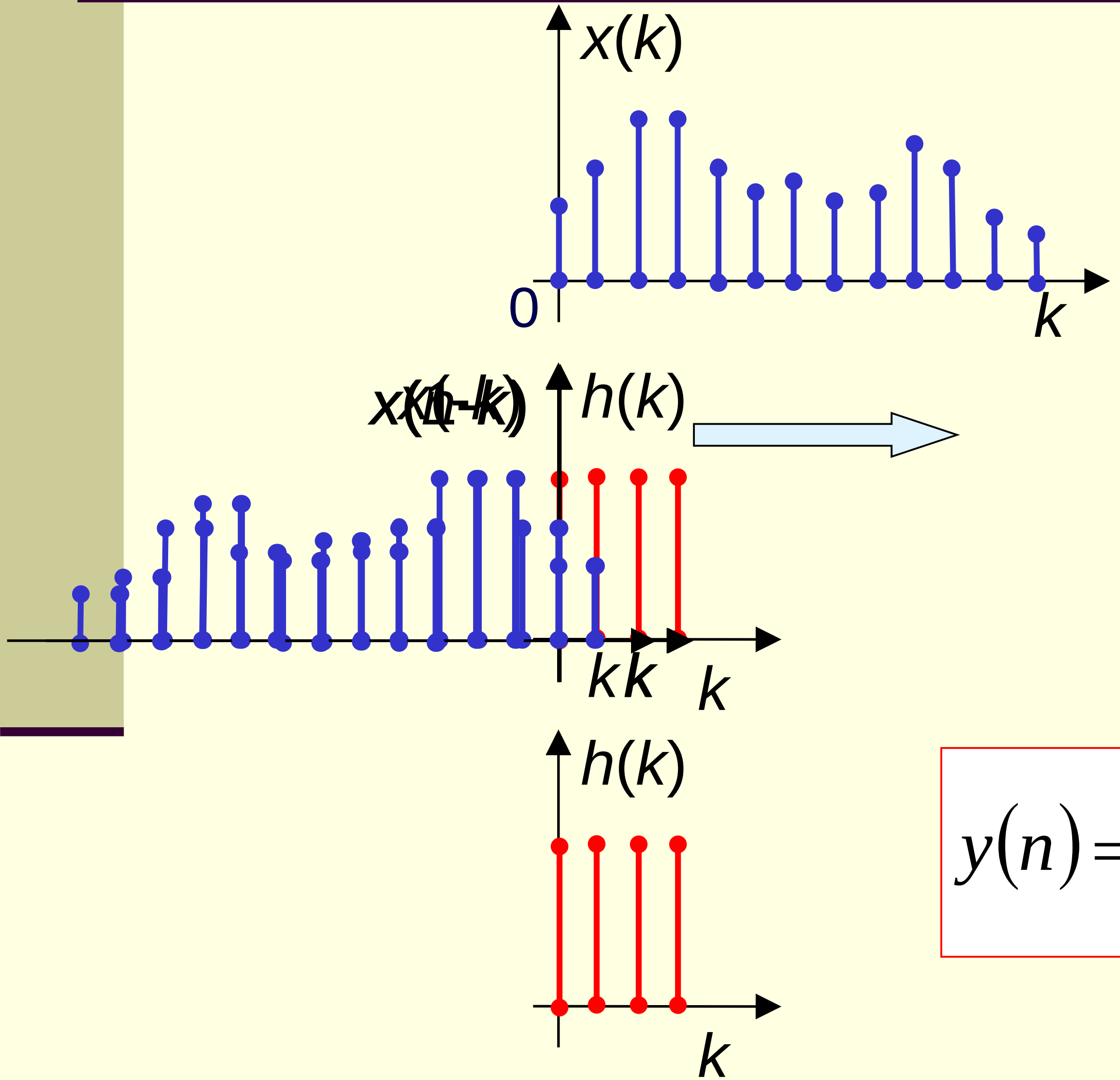
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

jest nazywane **splotem** (konwolucją), $x(n)$ z $h(n)$, tj. ciągu wejściowego z odpowiedzią impulsową systemu.

Zachodzi:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h(k)x(n-k)$$

Obliczanie splotu



$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h(k)\,x(n-k)$$

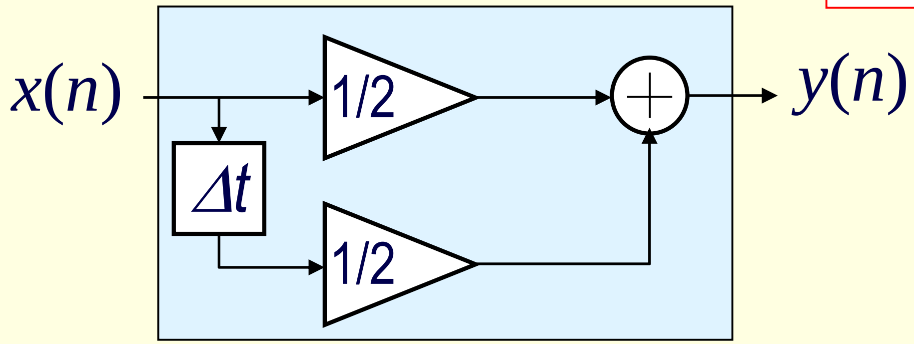
Obliczanie splotu - przykład

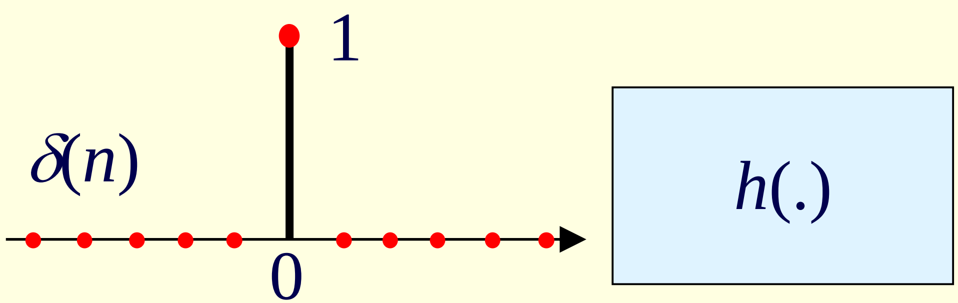
Niech jest dany system liniowy H(.):

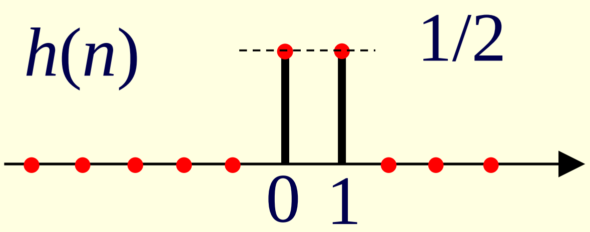
$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Odpowiedź impulsowa systemu:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$







Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Obliczanie splotu - przykład

Sygnał	odp. Imp.
x(0)=1	h(0)=1
x(1)=0	h(1)=1
x(2)=0	h(2)=1

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h(k)x(n-k)$$

$$|||$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(n-k)$$

y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) = 1+0+0 = 1

y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) = 1+0+0 = 1

y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 1+0+0 = 1

y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) = 0+0+0 = 0

y(4) =……………..

Obliczanie splotu - przykład

Sygnał	odp. Imp.
x(0)=1	h(0)=1
x(1)=1	h(1)=1
x(2)=1	h(2)=1

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}h(k)x(n-k)$$

|||

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}x(k)h(n-k)$$

y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) = 1+0+0 = 1

y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) = 1+1+0 = 2

y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 1+1+1 = 3

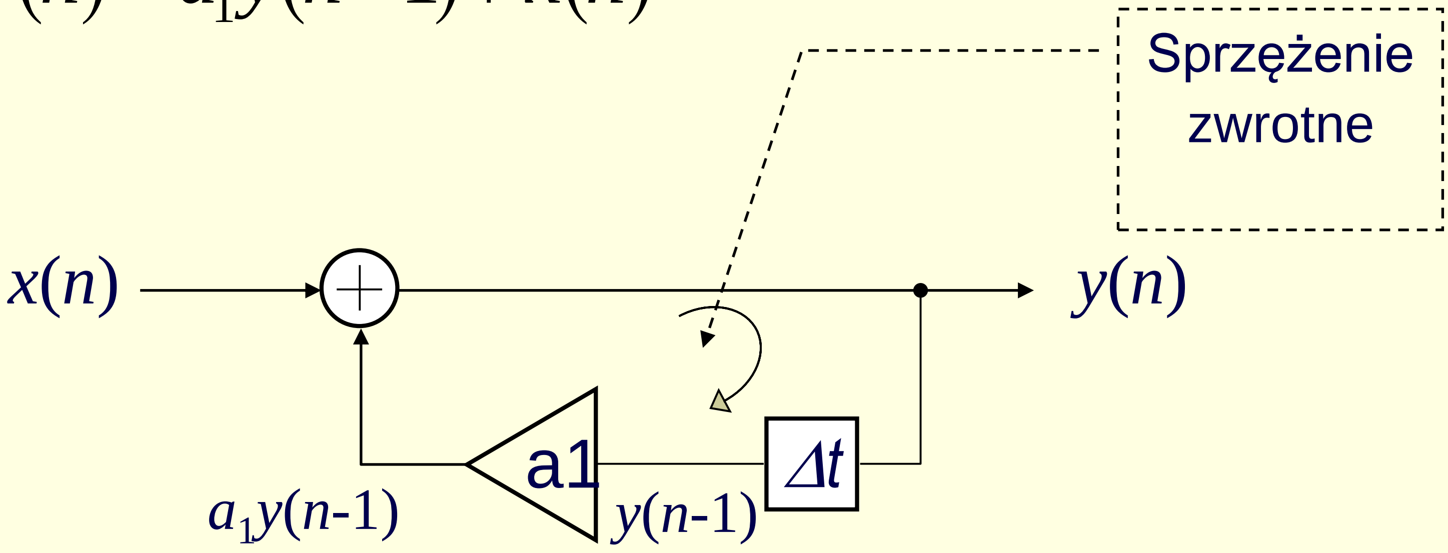
y(3) =…………..

y(4) =……………..

Nieskończona odpowiedź impulsowa

Odpowiedź impulsowa systemu może być nieskończona:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + x(n)$$



Dla jakich wartości współczynnika *a*1 system ten jest stabilny?

Pytania

1. Sygnał **dyskretny w czasie** można zdefiniować jako:
   a) kombinację liniową ważonych, jednostkowych funkcji impulsowych
   b) kombinację liniową kolejno opóźnianych jednostkowych funkcji impulsowych
   c) kombinację liniową jednostkowych funkcji impulsowych
   d) kombinację liniową ważonych i kolejno opóźnianych jednostkowych funkcji impulsowych

2. Znajomość **funkcji impulsowej** umożliwia w pełni scharakteryzować:
   a) liniowy system bez pamięci
   b) system liniowy
   c) system niezmienny względem przesunięcia
   d) system liniowy, niezmienny względem przesunięcia

Splot jako filtracja

Przekład:

Oblicz splot sygnału EKG z odpowiedzią impulsową:

$$h(n) = \left[\frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{24} \quad .... \quad \frac{1}{24} \right]_{24}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{k=23} \frac{1}{24} x(n-k)$$

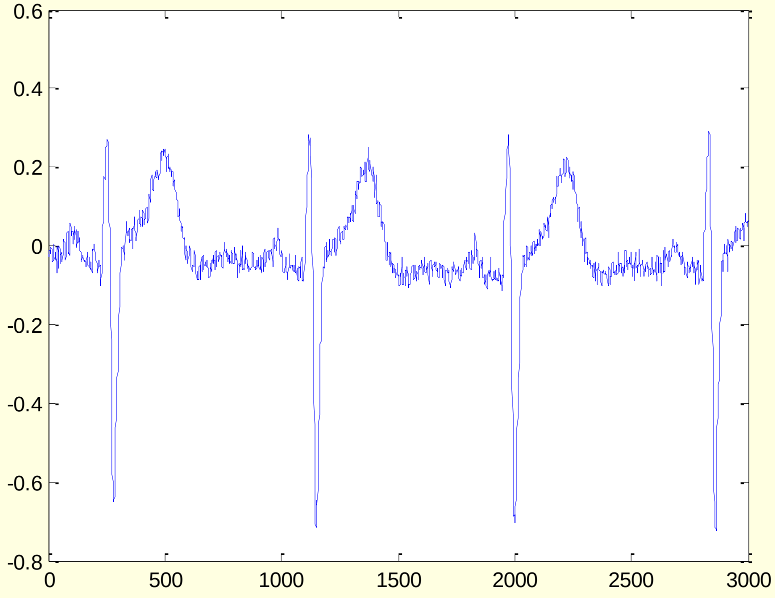
Splot jako filtracja

```
# Python (interactive mode)
from scipy.io import loadmat,savemat
ecg=loadmat('ecg_all.mat')['ecg_s']  #load ecg signal and assign to variable ecg
ecg=reshape(ecg,len(ecg))   #reshaping required for .mat files
plot(ecg)
h=1/24.*ones(24)                     #define impulse response h
y=convolve(h,ecg)                    #result of filtering
plot(y)
```

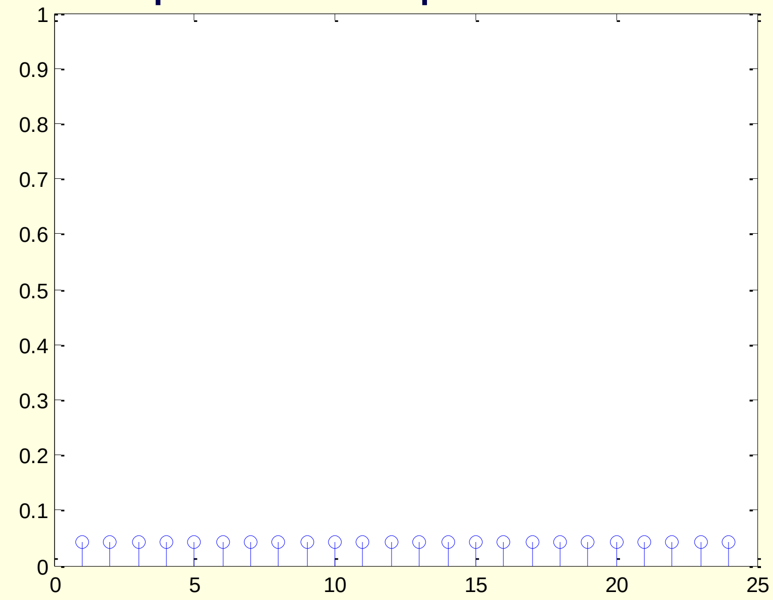
$$y(n)=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\ldots+h(23)x(n-23)=\sum_{k=0}^{k=23}h(k)x(n-k)$$

Splot jako filtracja

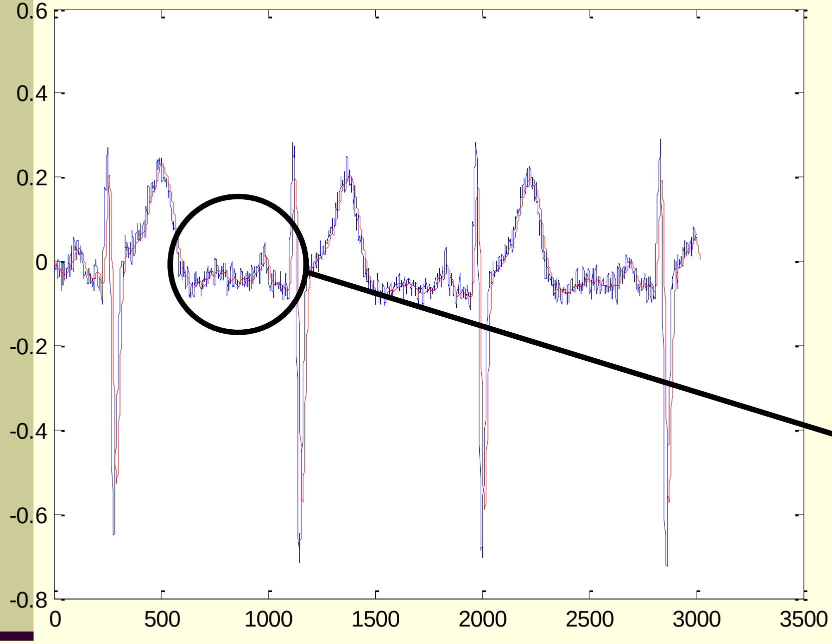
Sygnał EKG



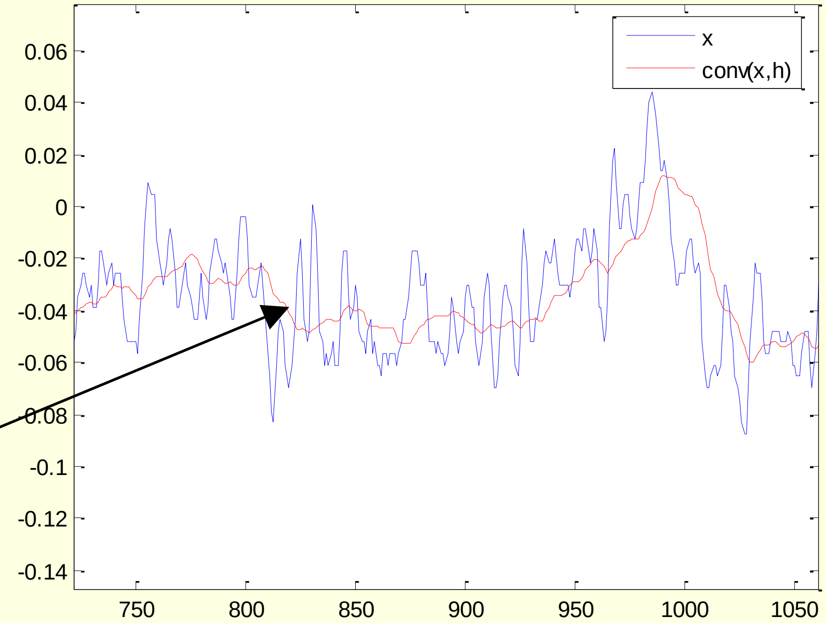
Odpowiedź impulsowa filtru



Splot jako filtracja

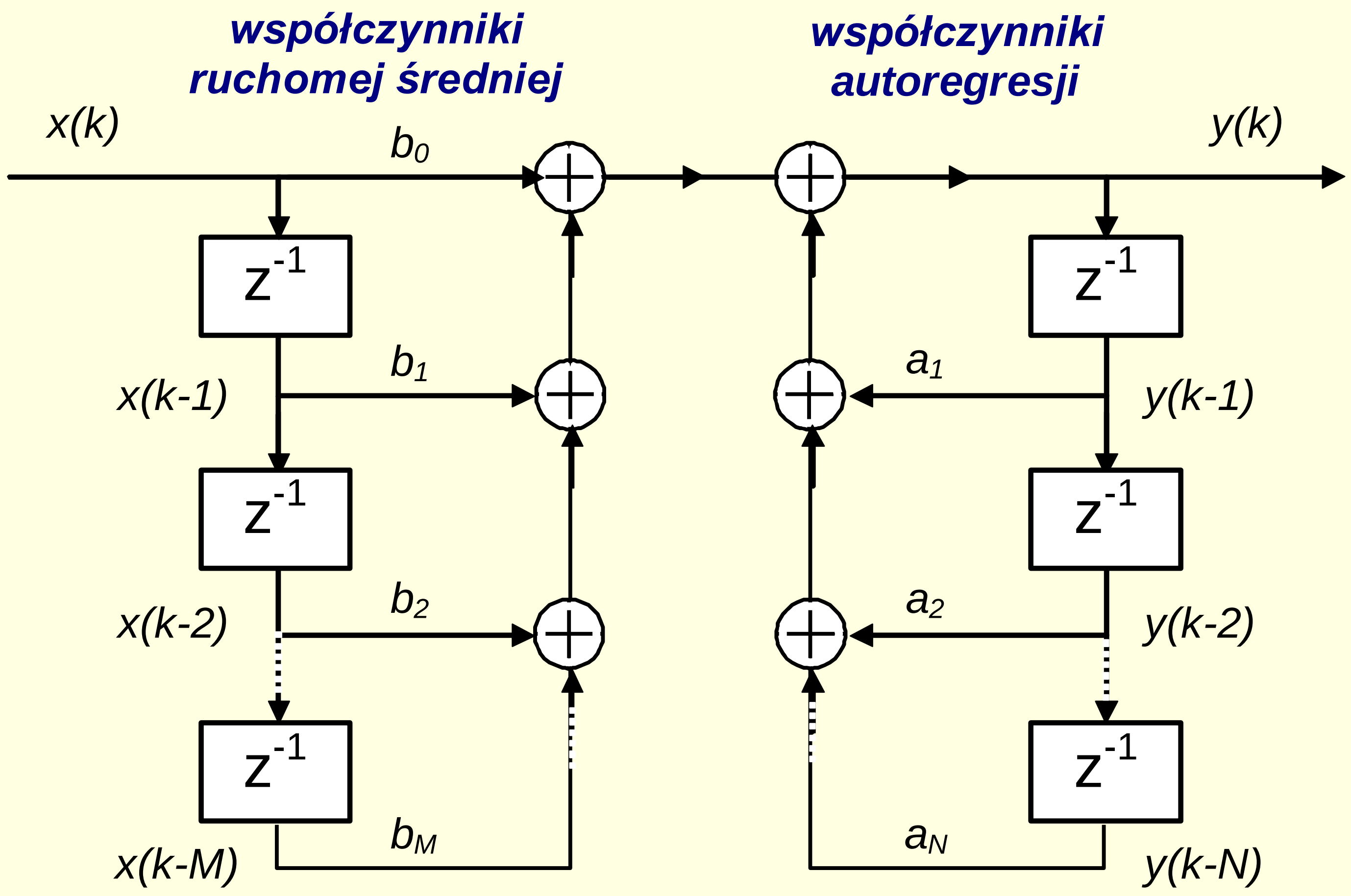


Wynik filtracji splotowej



Filtr „wygładzający"

Splot → filtry cyfrowe



Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Podsumowanie

1. Rodzaje systemów przetwarzania sygnałów dyskretnych
2. Własności systemów
3. Systemy liniowe niezmienne względem przesunięcia
4. Splot
   - definicja
   - obliczanie
   - przykłady - filtracja