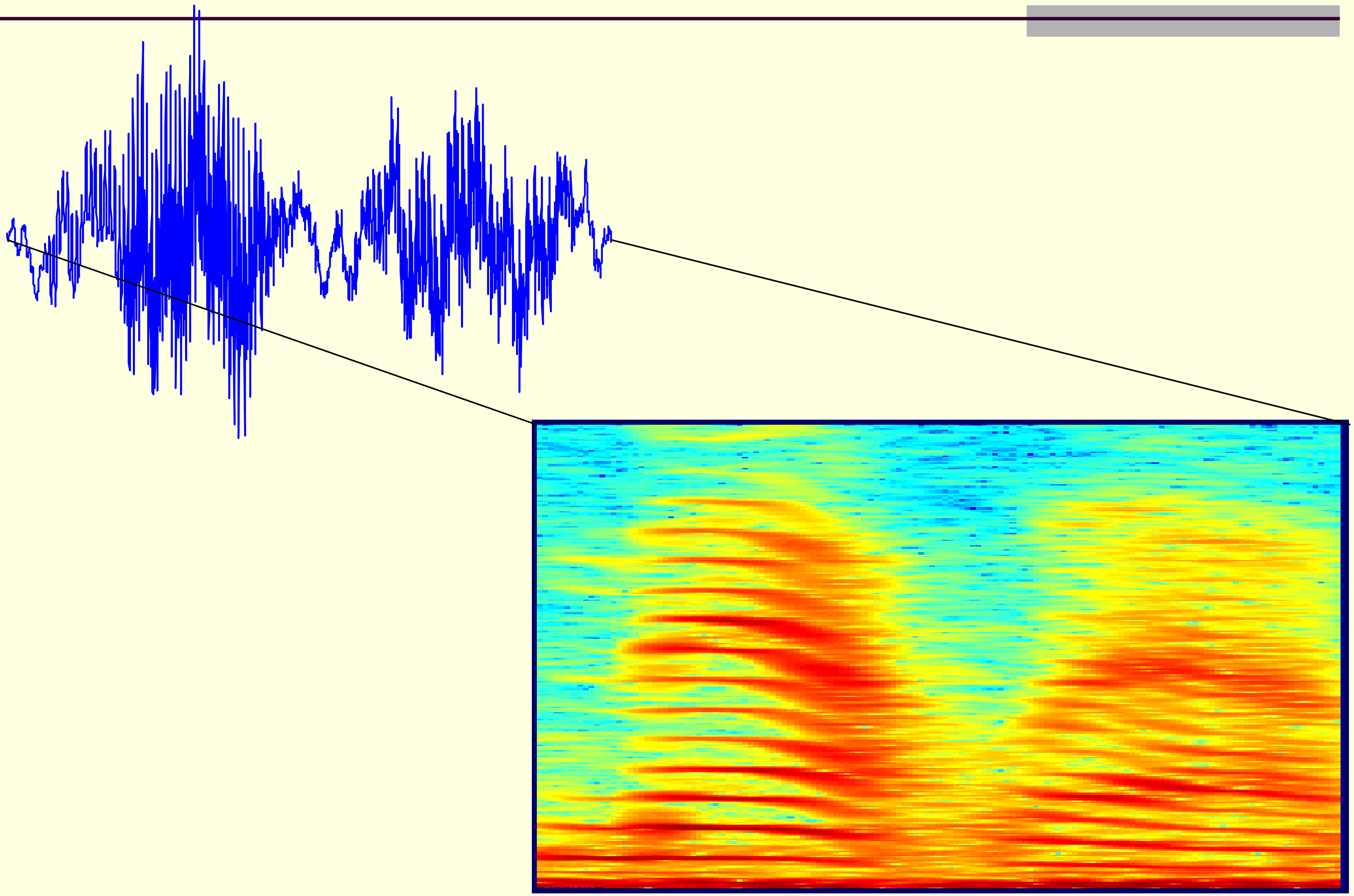
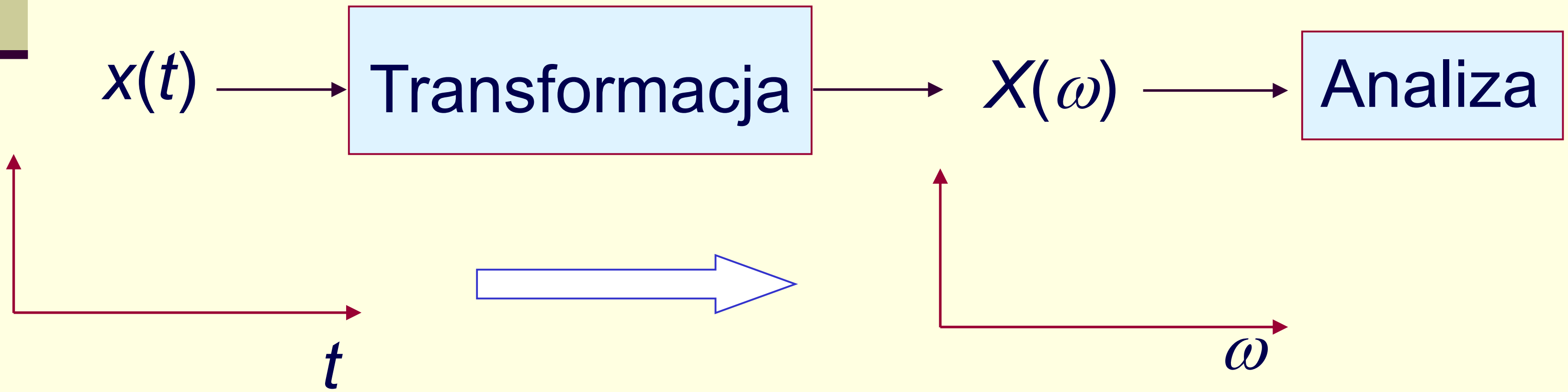
Analiza widmowa sygnałów



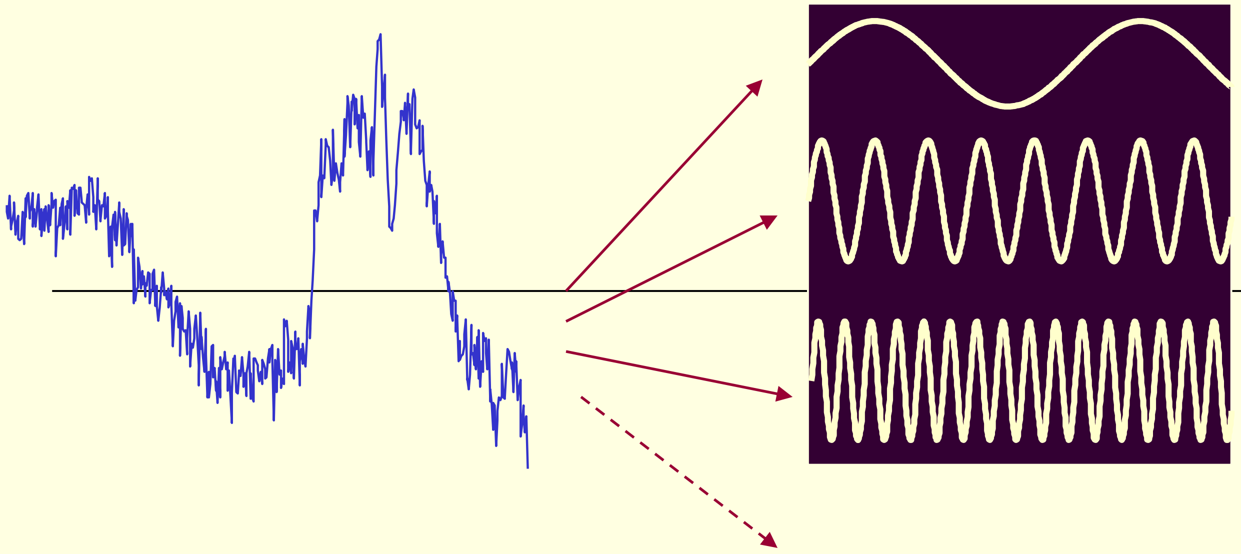
Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Analiza widmowa sygnałów

Przekształcenie sygnałów do dziedziny ich widma częstotliwościowego (tj. jego składowych harmonicznych) pozwala ujawniać cechy sygnału, które nie są widocznie w dziedzinie czasu, np. cechy posiadające istotną wartość diagnostyczną.



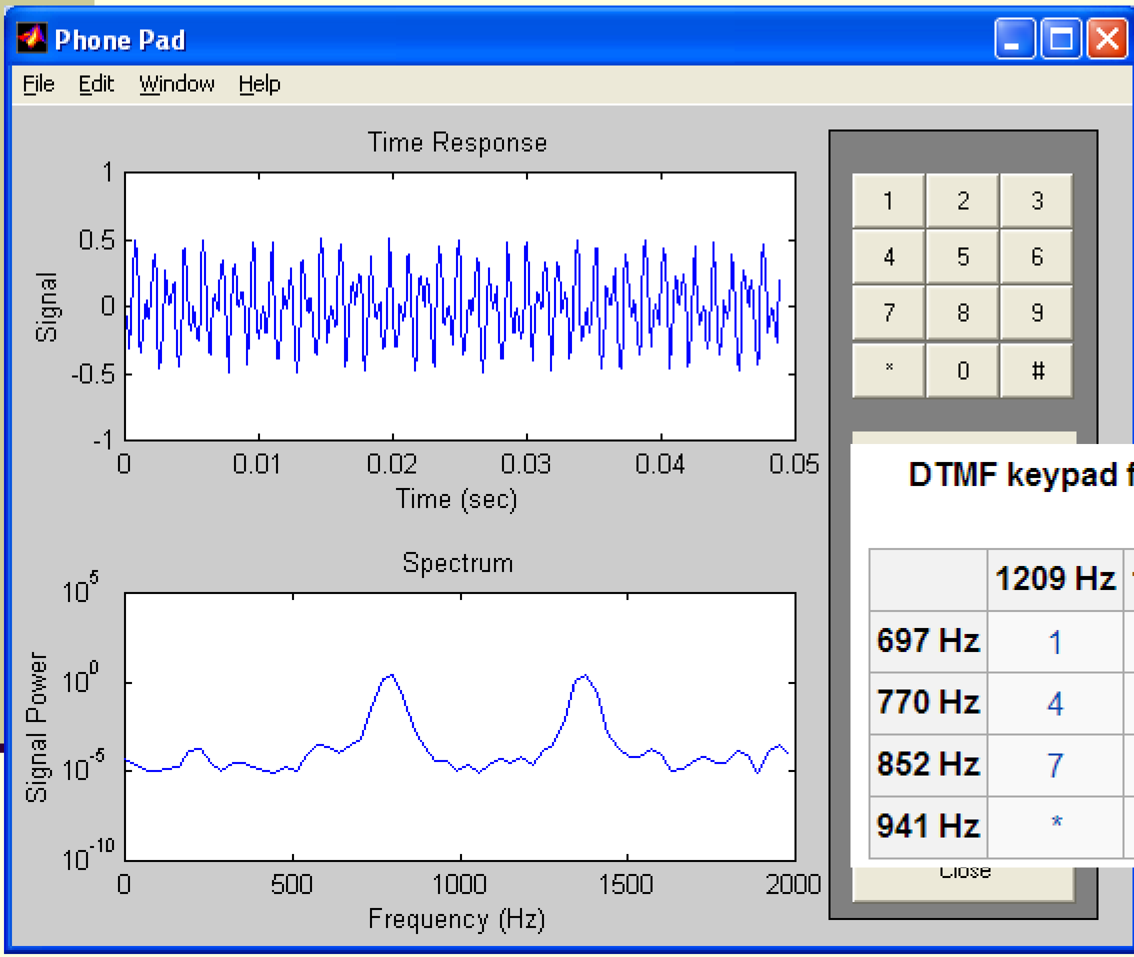
Reprezentacja sygnałów za pomocą szeregu Fouriera



Joseph Fourier
(1768-1830)

Szeroka klasa sygnałów może być reprezentowana za pomocą <u>kombinacji liniowej</u> funkcji harmonicznych o różnych częstotliwościach – tzw. **szereg Fouriera**

Wybieranie tonowe (DTMF - Dual Tone Multi Frequency)



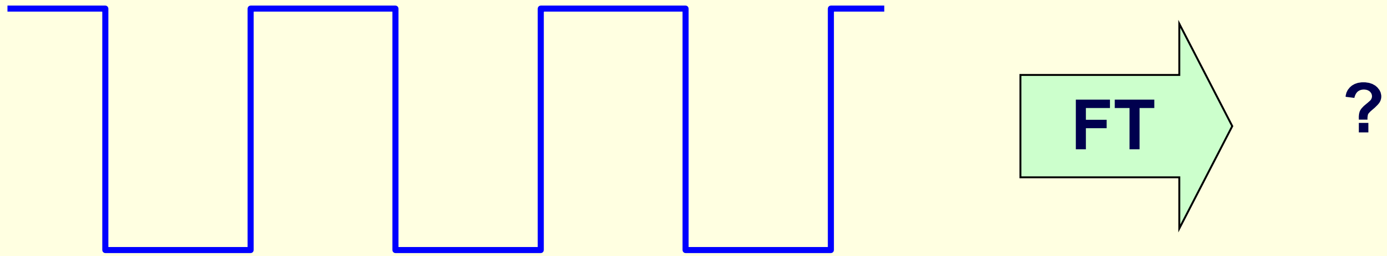
DTMF keypad frequencies (with sound clips)

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

http://onlinetonegenerator.com/dtmf.html

Analiza widmowa

Ja wyznaczyć (obliczyć) amplitudy harmonicznych
o różnych częstotliwościach dla sygnałów o dowolnych kształtach?



Trygonometryczny szereg Fouriera

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right)$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ **częstotliwość podstawowa [rad/s]**

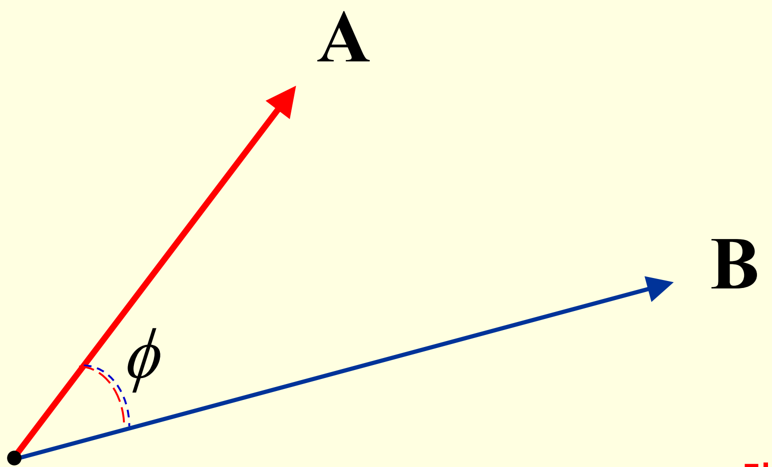
oraz:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)\cos k\omega_0 t dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)\sin k\omega_0 t dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

Iloczyn skalarny wektorów



$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\,cos\,\phi}$$

Iloczyn skalarny wektorów jest liczbą

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0 \quad dla \quad \phi=90^{\circ}$ tj. dla wektorów prostopadłych (ortogonalnych)

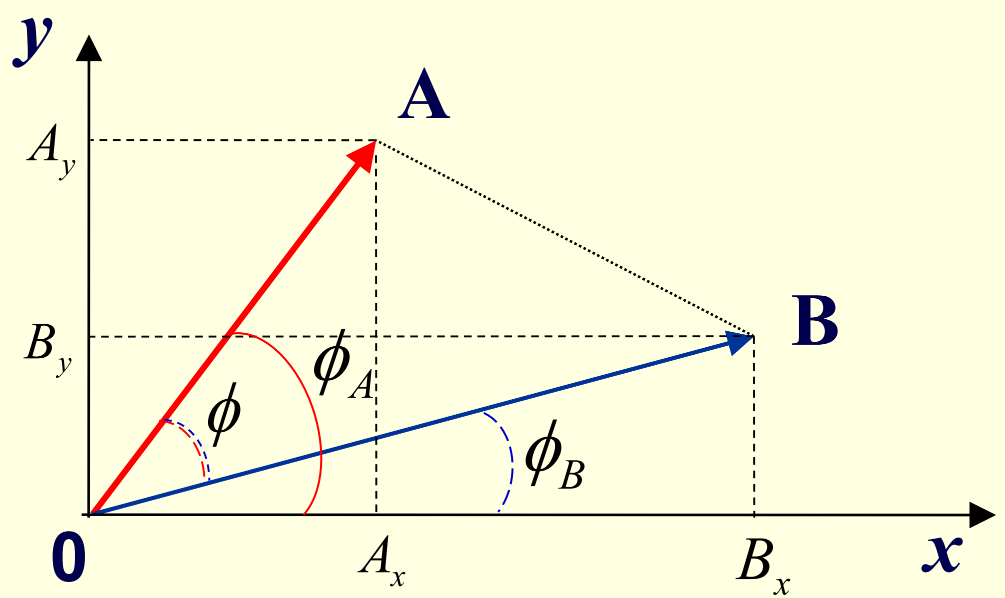
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=min<0 \quad dla \quad \phi=180^{\circ}$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=max>0 \quad dla \quad \phi=0^{\circ}$

Iloczyn skalarny wektorów w układzie kartezjańskim

$$\mathbf{A} = [A_x, A_y]$$
$$\mathbf{B} = [B_x, B_y]$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y}$$



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| cos(\phi_A - \phi_B) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|(cos\,\phi_A\, cos\,\phi_B + sin\,\phi_A\, sin\,\phi_B) =$$
$$= |\mathbf{A}| cos\,\phi_A |\mathbf{B}| cos\,\phi_B + |\mathbf{A}| sin\,\phi_A |\mathbf{B}| sin\,\phi_B = A_x B_x + A_y B_y$$

Iloczyn skalarny wektorów

Na płaszczyźnie →

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

Dla *N*-wymiarowych wektorów:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$$
$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_N]$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_N y_N$$

$$\equiv$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = [x_1, x_2, \ldots, x_N] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Wektory można interpretować jako sygnały dyskretne

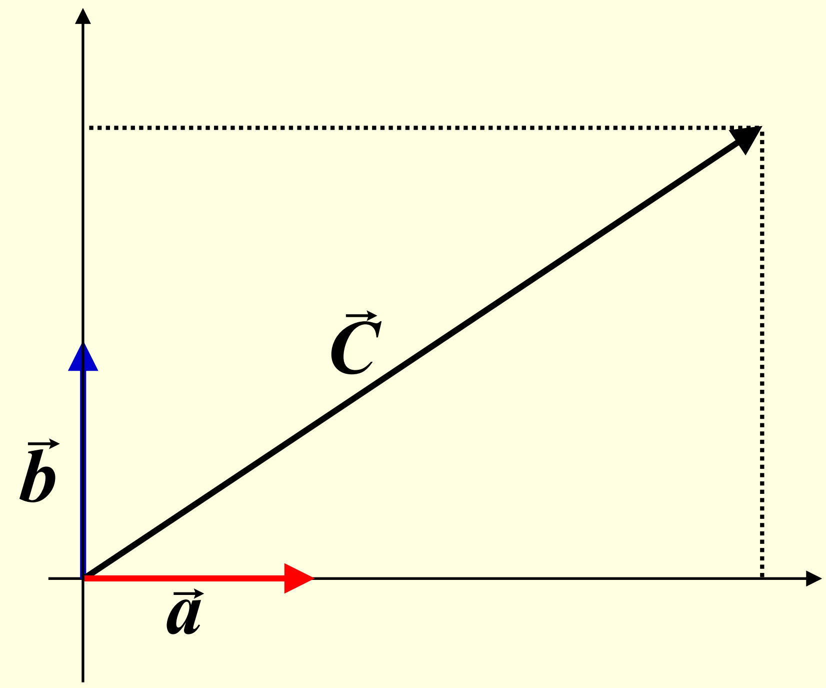
Wektory bazowe

Problem: Chcemy przedstawić dowolny wektor $\vec{C}$ na płaszczyźnie za pomocą wektorów bazowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o jednostkowych długościach

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

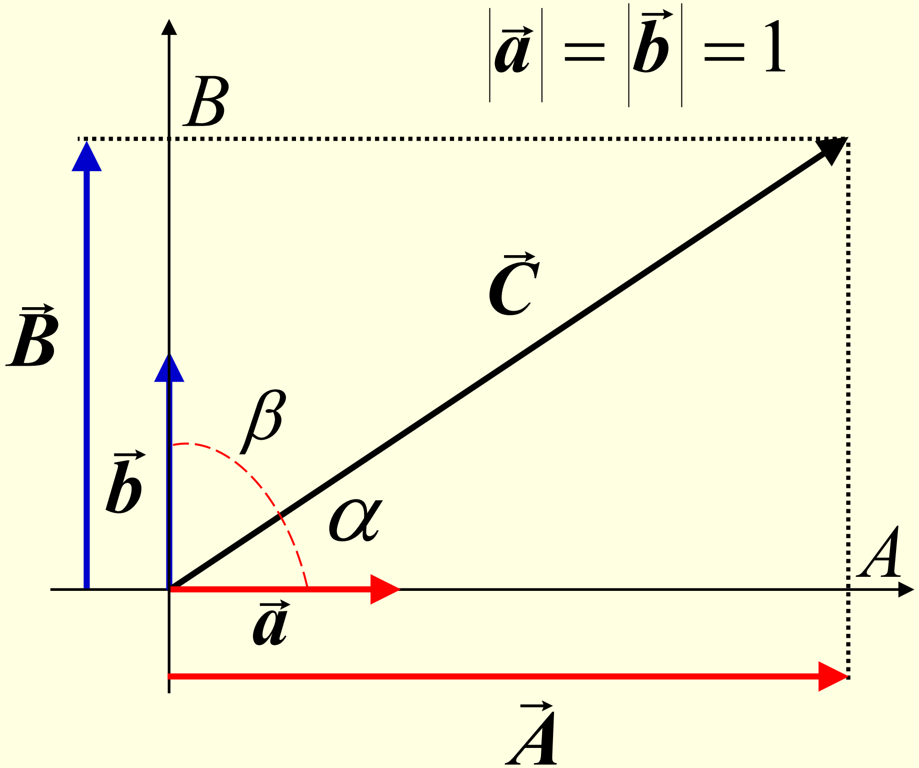
Wektory prostopadłe (ortogonalne)



Wektory bazowe

Teza:

$$\vec{C} = \left(\vec{a}\cdot\vec{C}\right)\vec{a} + \left(\vec{b}\cdot\vec{C}\right)\vec{b}$$



Dowód:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{C}\right)\vec{a} = \left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{C}\right| cos\,\alpha\right)\vec{a} = A\,\vec{a}$$

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{C}\right)\vec{b} = \left(\left|\vec{b}\right|\left|\vec{C}\right| cos\,\beta\right)\vec{b} = B\,\vec{b}$$

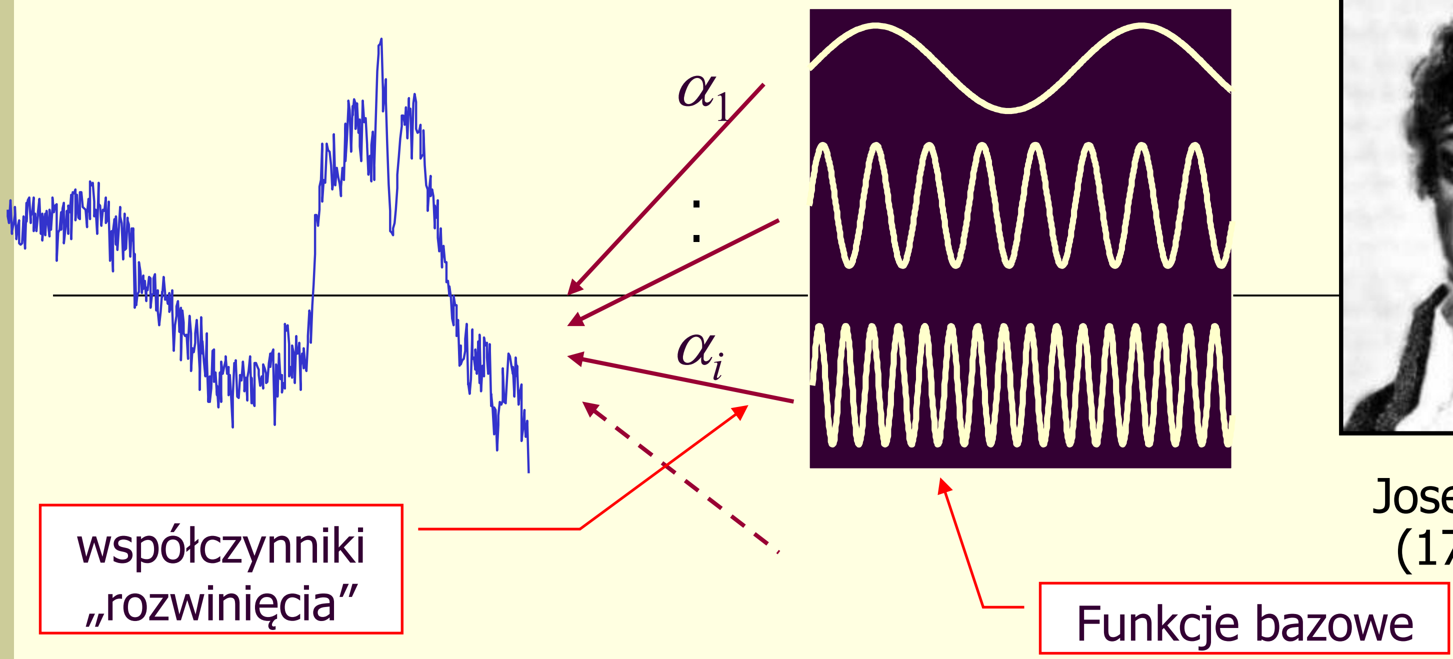
$$\Downarrow$$

$$\vec{C} = \underline{A\vec{a} + B\vec{b}} = \vec{A} + \vec{B}$$

c.n.d.

Kombinacja liniowa wektorów bazowych

Wracamy do szeregu Fouriera



Joseph Fourier
(1768-1830)

Szeroka klasa sygnałów może być reprezentowana za pomocą <u>kombinacji liniowej</u> funkcji harmonicznych o różnych częstotliwościach – tzw. **szereg Fouriera**

Idea dyskretnej reprezentacji (aproksymacji funkcji)

Rozważmy zagadnienie: daną funkcję g chcemy dobrze przybliżyć ważoną sumą pewnej liczby *n* prostszych funkcji f_i :

$$g \approx \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

Kombinacja liniowa funkcji bazowych

Zwykle zbiór funkcji f_i jest zadany, a naszym celem jest znalezienie takich współczynników α_i , dla których uzyskamy najlepsze przybliżenie funkcji g za pomocą zadanej liczby *n* prostszych funkcji f_i

Trygonometryczny szereg Fouriera

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ **częstotliwość podstawowa [rad/s]**

oraz:

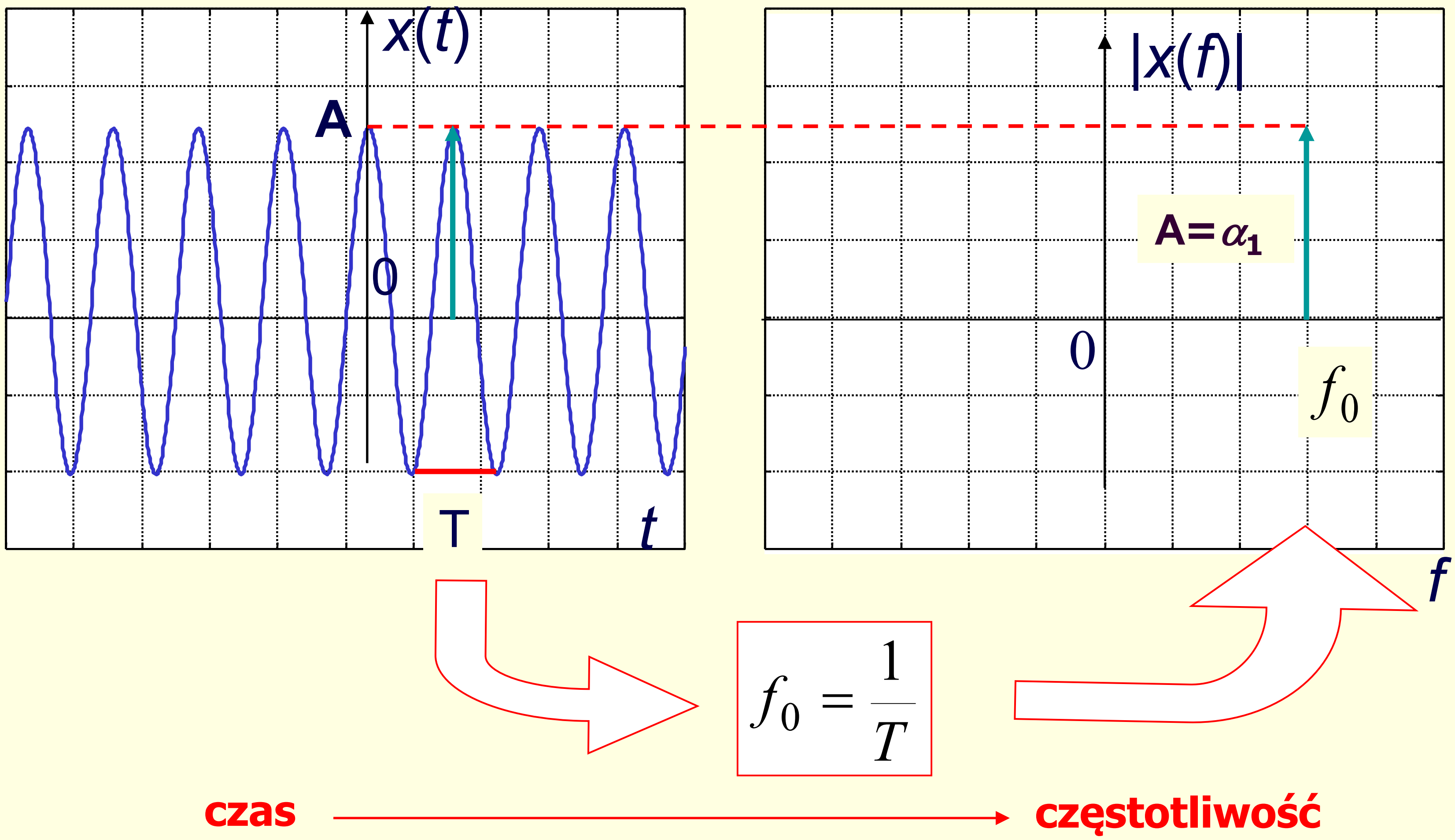
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \boxed{x(t)\cos k\omega_0 t}\,dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \boxed{x(t)\sin k\omega_0 t}\,dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

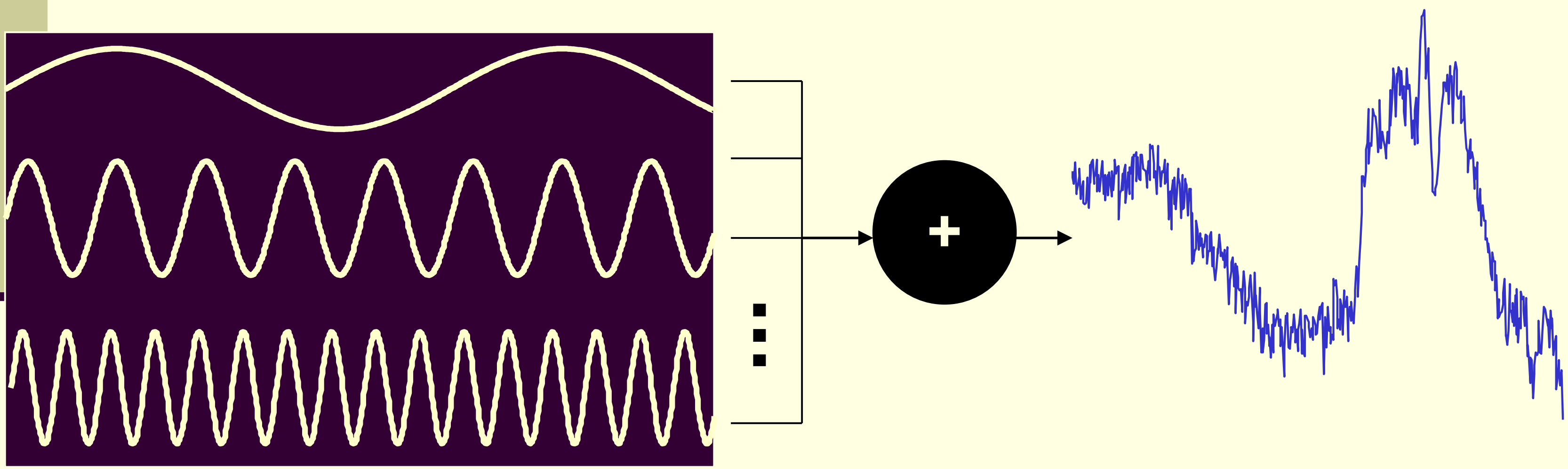
Iloczyny skalarne funkcji

Widmo Fouriera kosinusoidy



Trygonometryczny szereg Fouriera

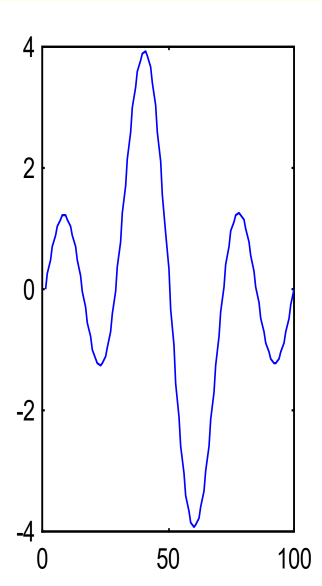
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$



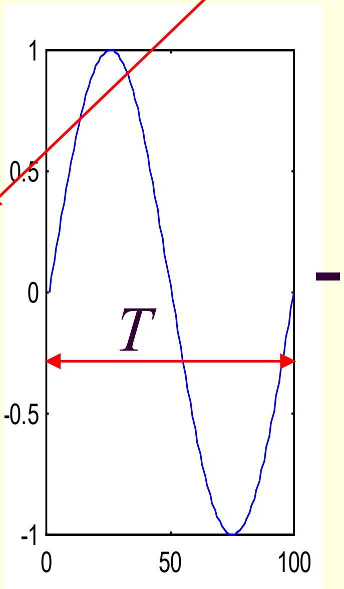
Szereg Fouriera - przykład

$$x(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

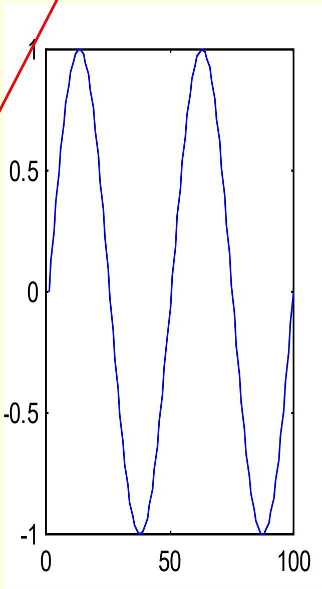
$$x(t)=\sin\omega_0 t-1.5\cdot\sin 2\omega_0 t+2\cdot\sin 3\omega_0 t$$



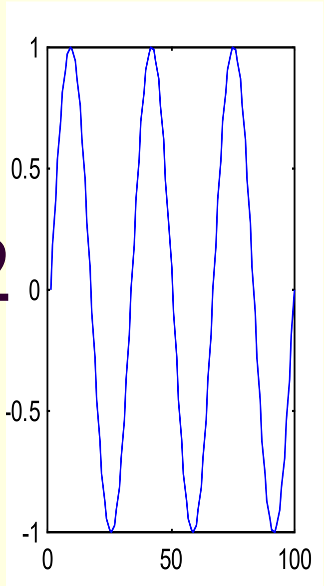
$=$ 1



-1.5



+2



pulsacja podstawowa

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

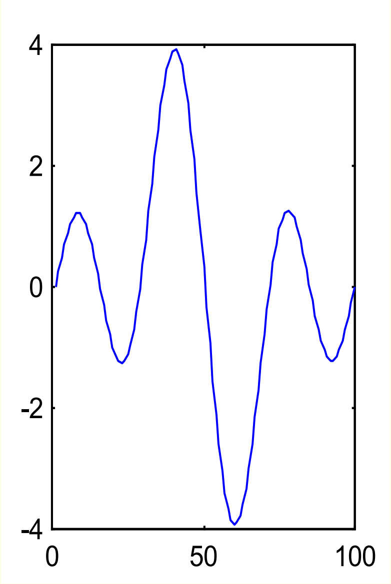
okres podstawowy

Szereg Fouriera - przykład

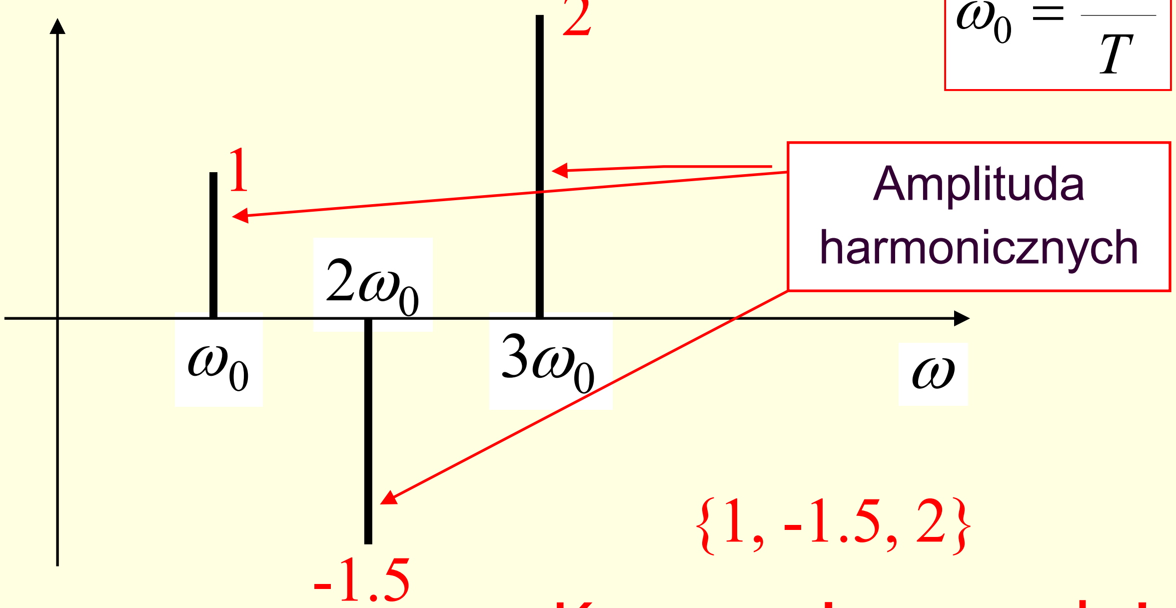
$$x(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$x(t)=1\sin\omega_0 t-1.5\cdot\sin 2\omega_0 t+2\cdot\sin 3\omega_0 t$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$



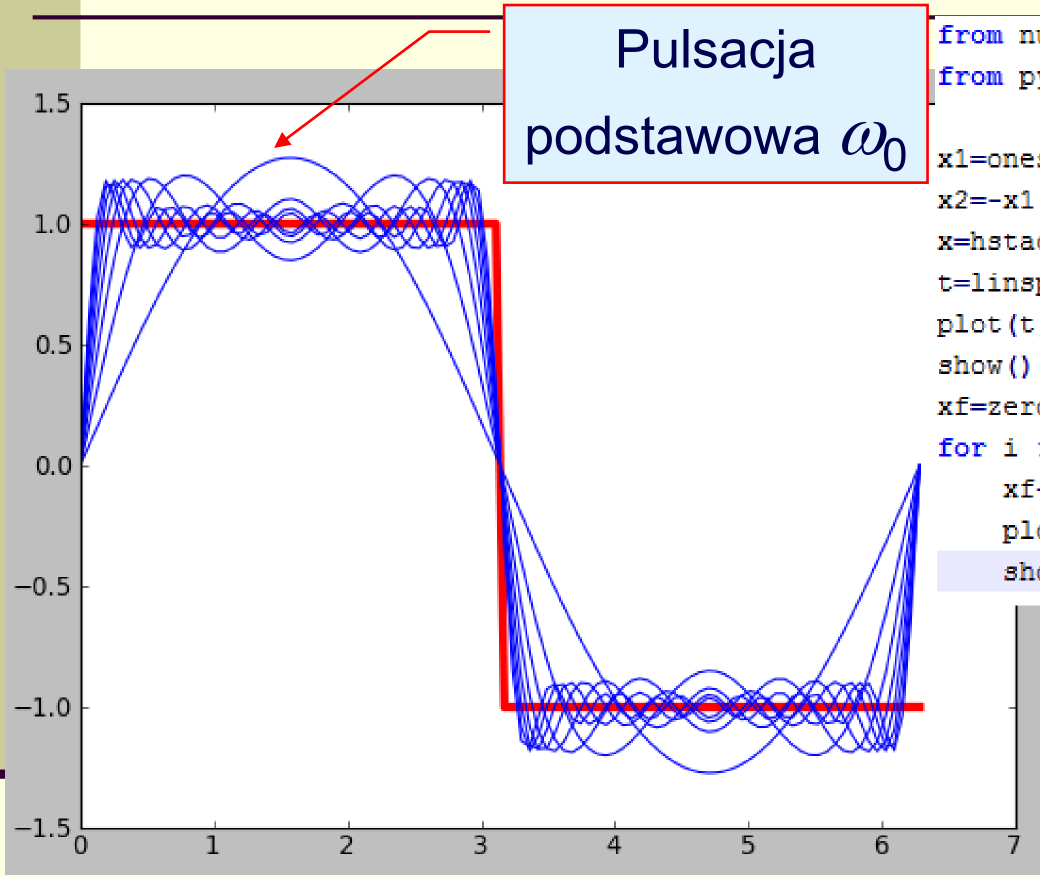
=



{1, -1.5, 2}

Kompresja sygnału!

Szereg Fouriera - przykład

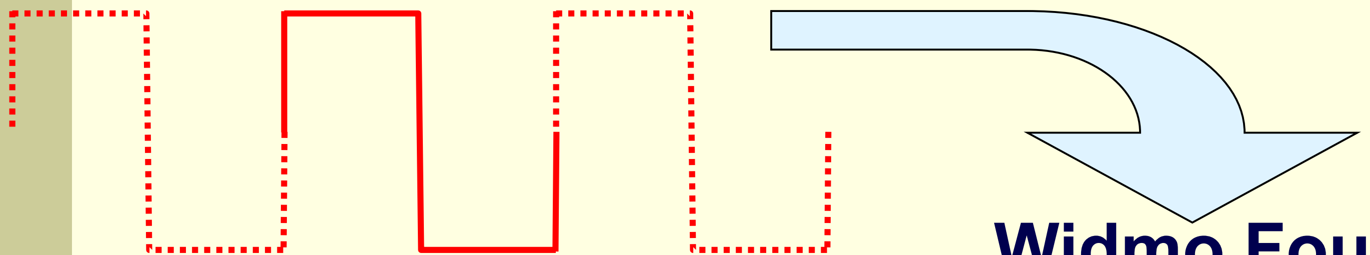



```python
from numpy import sin, ones, hstack, zeros, pi, linspace
from pylab import plot,show

x1=ones(50)
x2=-x1
x=hstack((x1,x2))
t=linspace(0,2.0*pi,100)
plot(t,x,'r', linewidth=4)
show()
xf=zeros(len(t))
for i in xrange(1,17,2):
    xf+=4.0/pi*sin(i*t)/i
    plot(t,xf,'b')
    show()
```

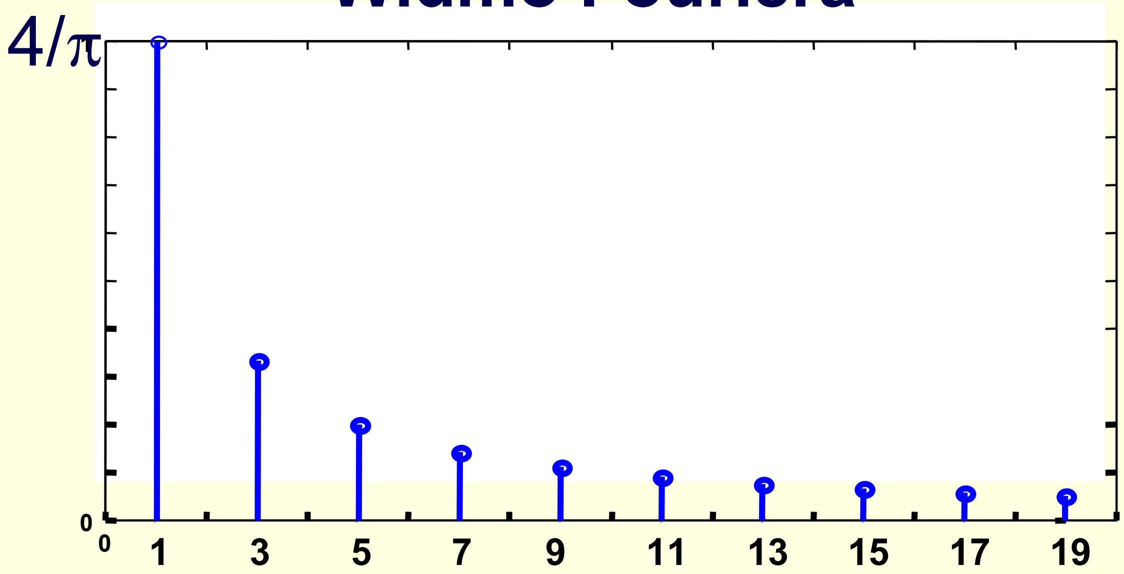
$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\ldots\right) \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$$

Szereg Fouriera - przykład

See: www.youtube.com/watch?v=LznjC4Lo7IE

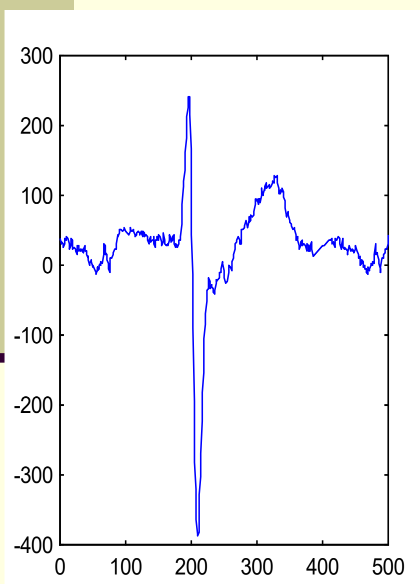


Widmo Fouriera

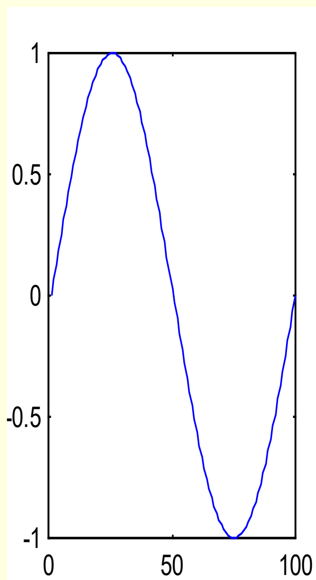


A jak wyznaczyć współczynniki widma dla dowolnej funkcji (sygnału)?

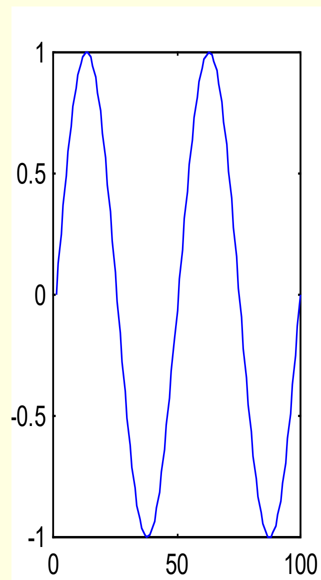
$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$



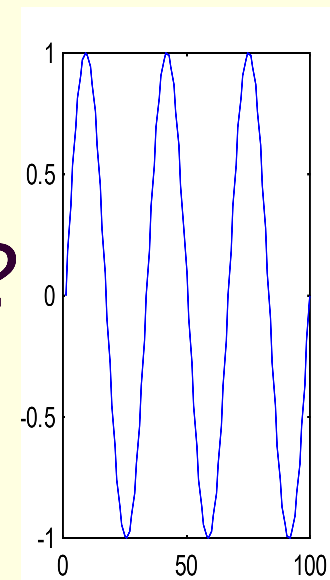
= ?



?

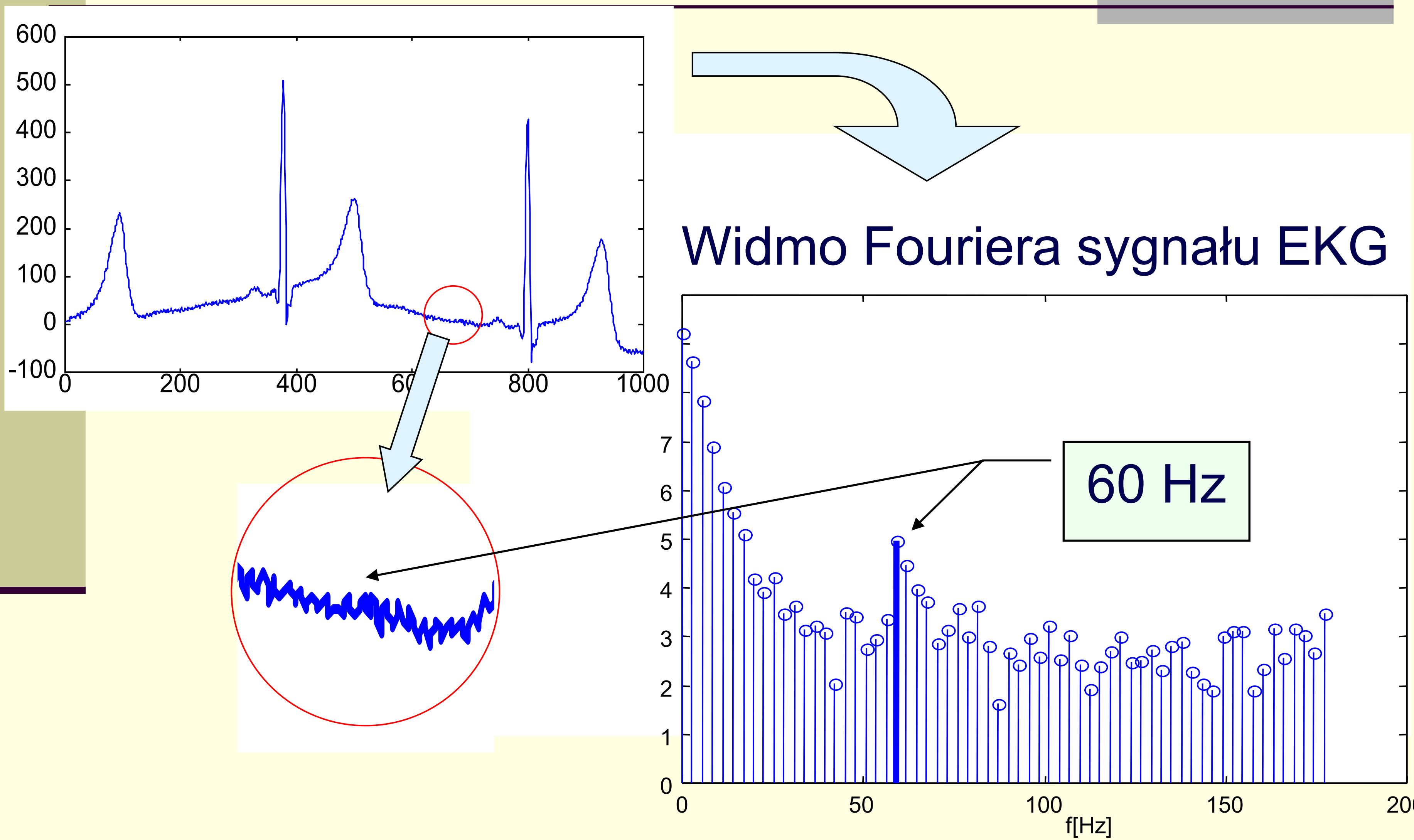


?

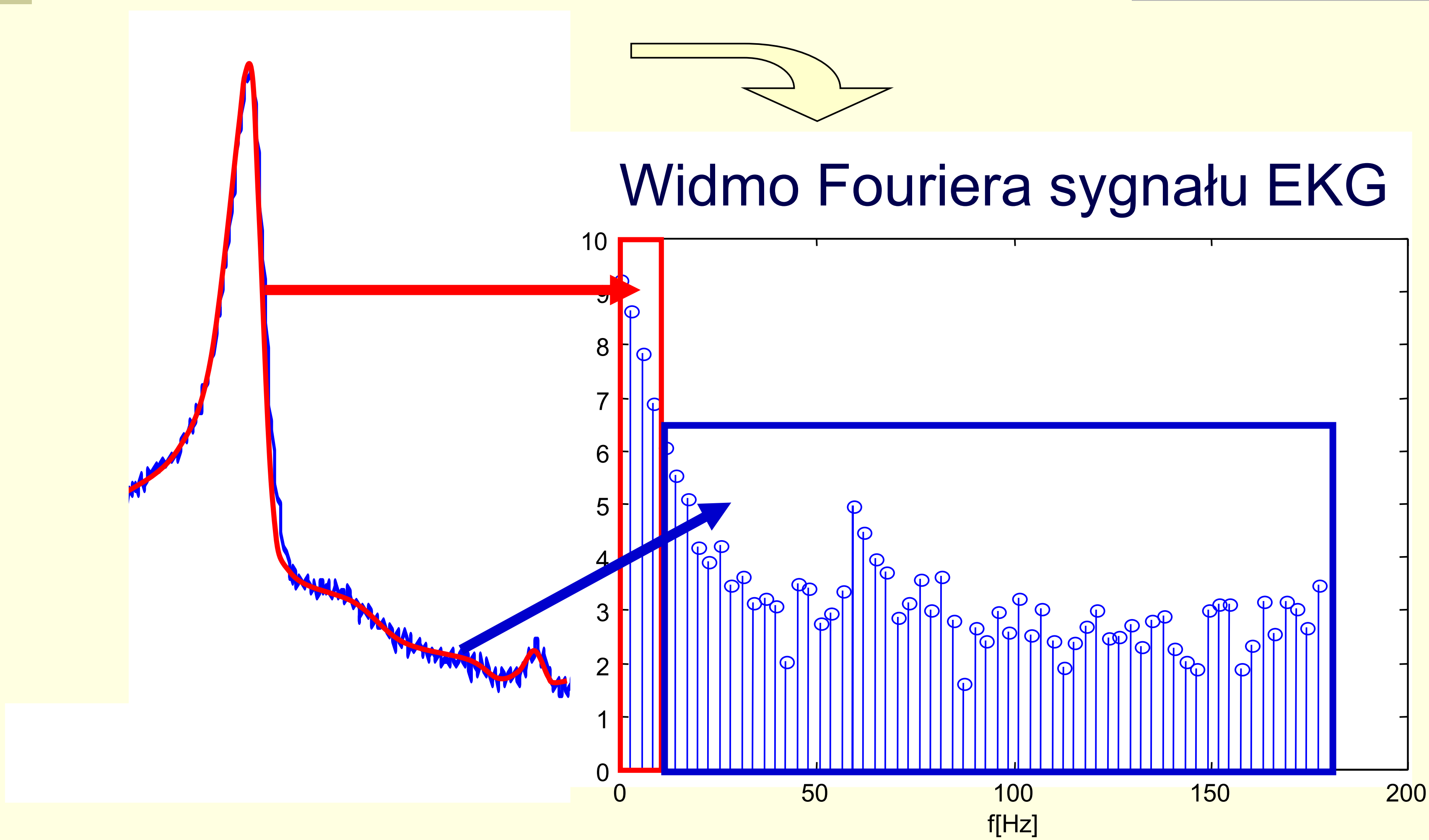


...

Szereg Fouriera - przykład



Widmo Fouriera zapisu EKG



Wykładnicza postać szeregu Fouriera

Niech:

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k = j\left(c_k - c_{-k}\right), & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$a_0 = 2c_0$$

wtedy:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(c_k + c_{-k}\right)\cos k\omega_0 t + j\left(c_k - c_{-k}\right)\sin k\omega_0 t\right)$$

oraz:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

zastosuj:

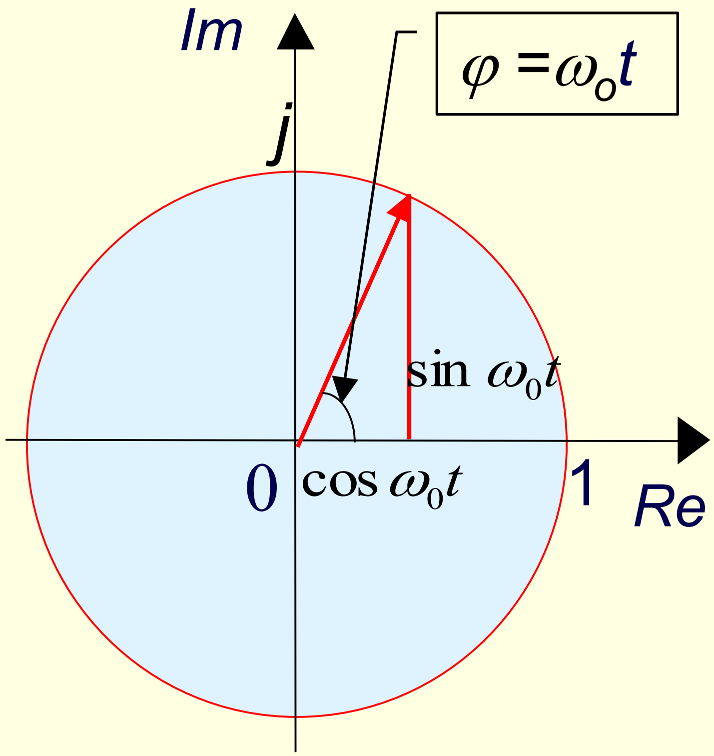
$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

Wzór Eulera

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$



Współczynniki Fouriera

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

gdzie:

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt, \quad X(0) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt$$

Przekształcenie Fouriera

Stosując zamiast $k\omega_0$ ciągłą pulsację ω:

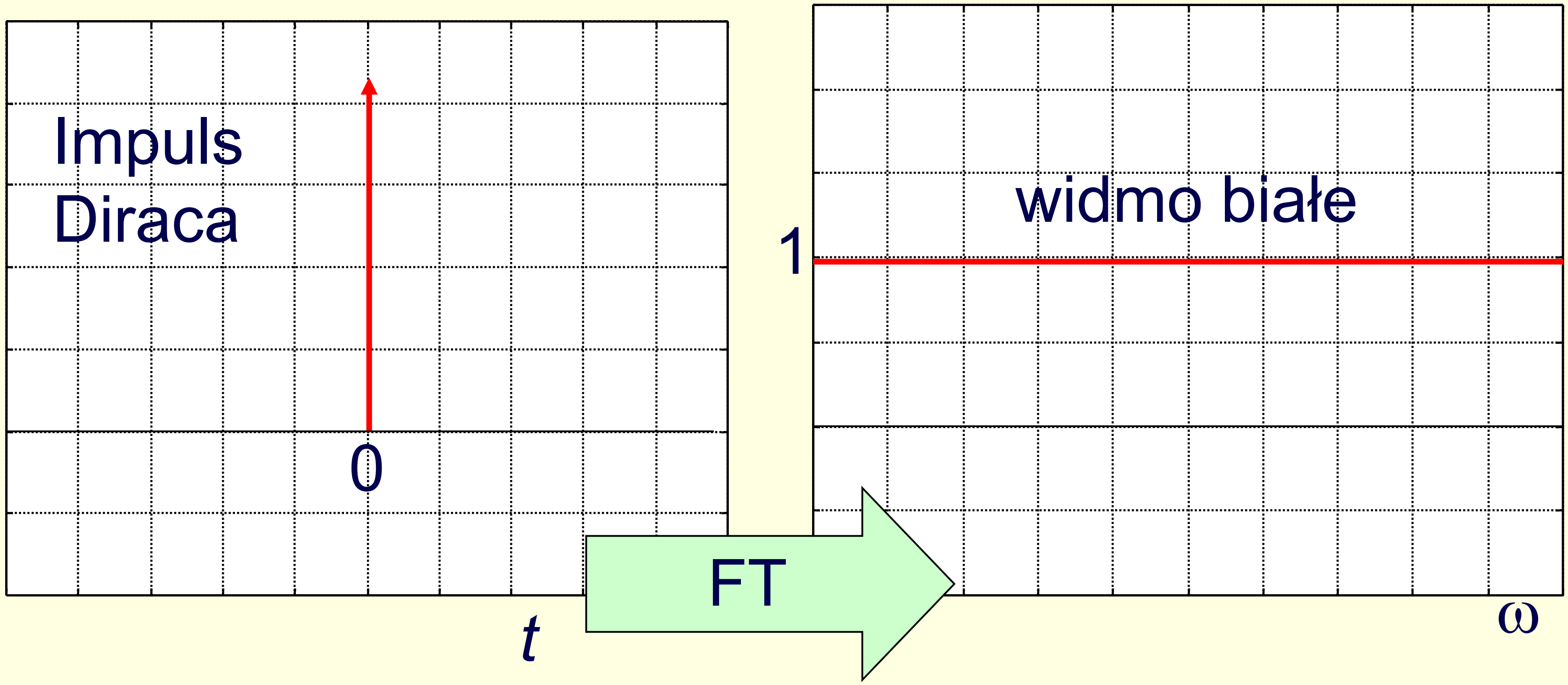
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(j\omega)}_{\text{Zespolone współczynniki Fouriera}} e^{j\omega t} d\omega$$

Zespolone współczynniki Fouriera

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

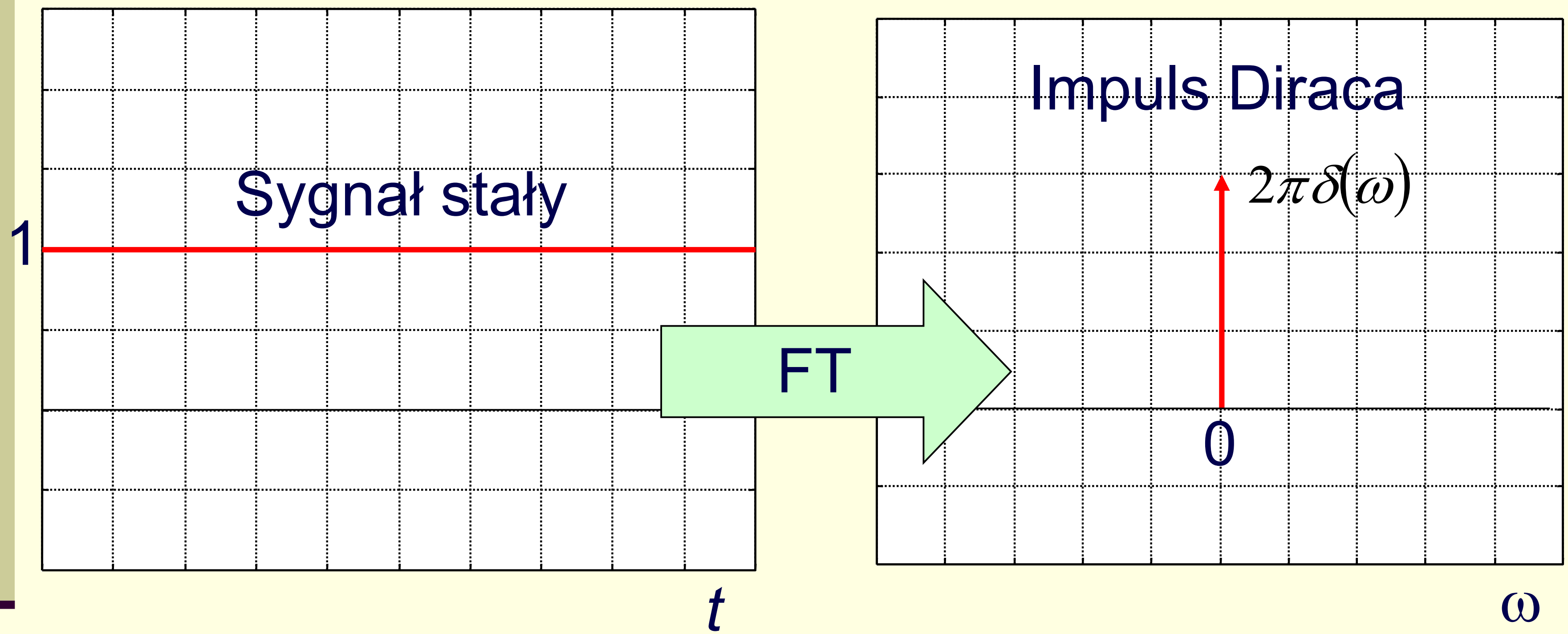
Liczby zespolone!

Przekształcenie Fouriera - przykład



$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & dla\ t=0\\ 0 & dla\ t\neq 0\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt=1$$

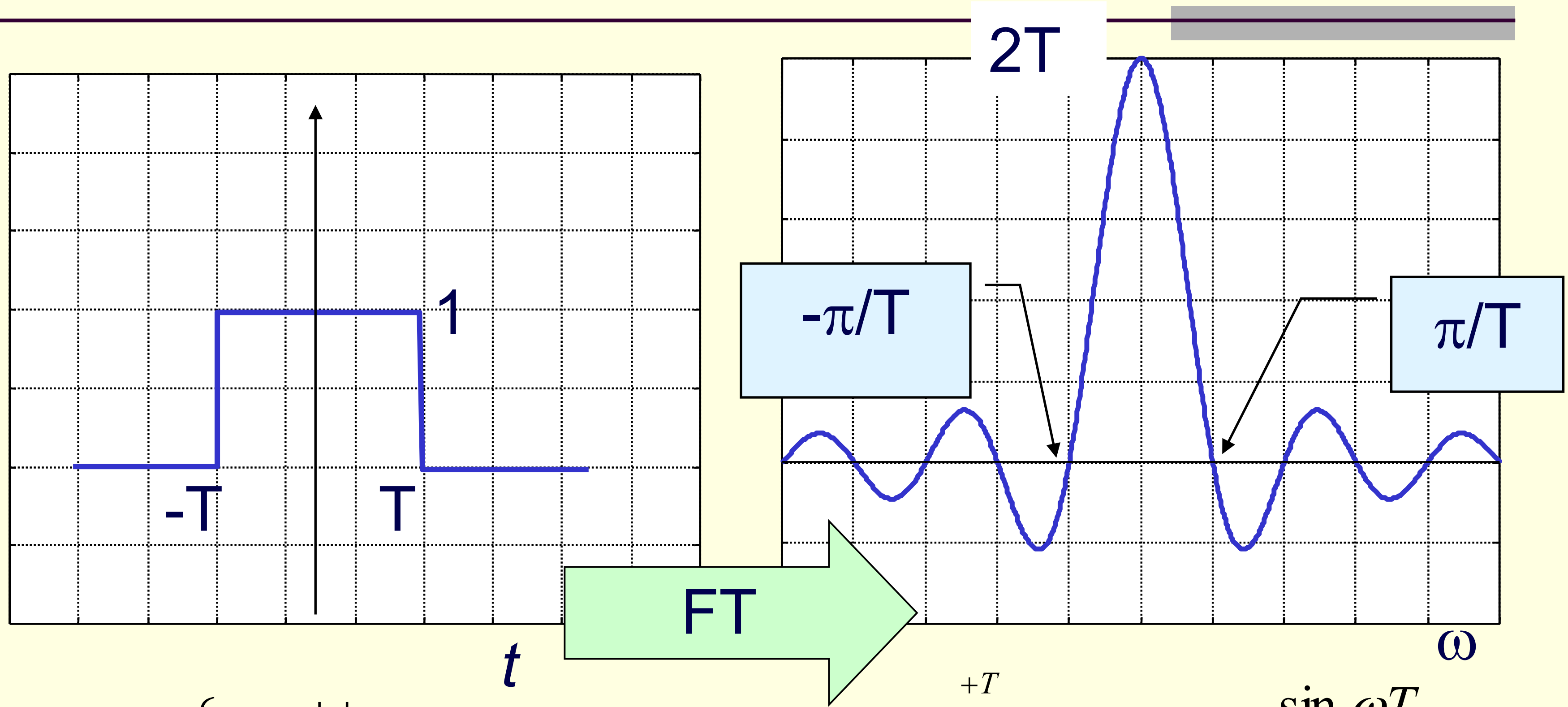
Przekształcenie Fouriera - przykład



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(\omega) = \begin{cases} \infty & dla \ \omega = 0 \\ 0 & dla \ \omega \neq 0 \end{cases}$$

Przekształcenie Fouriera - przykład



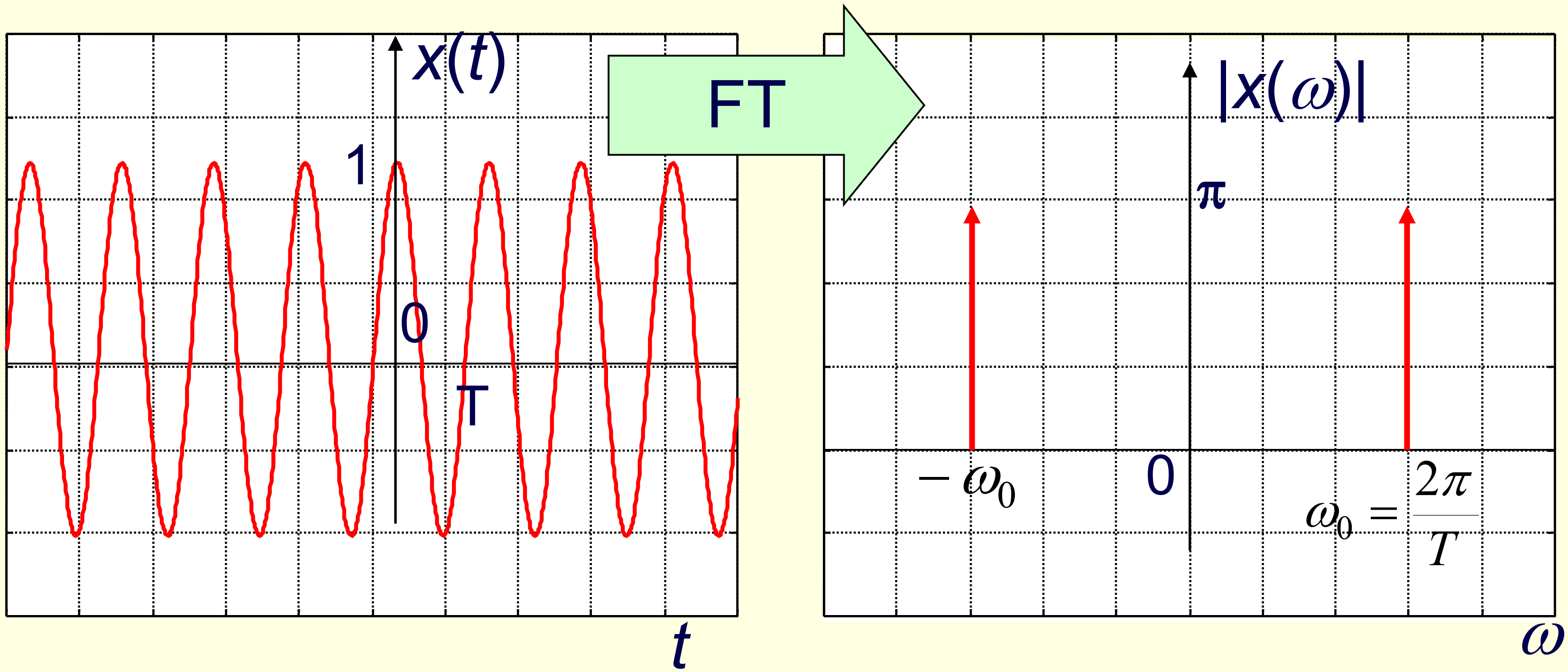
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t}\, dt = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

Sygnał o skończonym czasie trwania posiada nieskończenie szerokie pasmo!

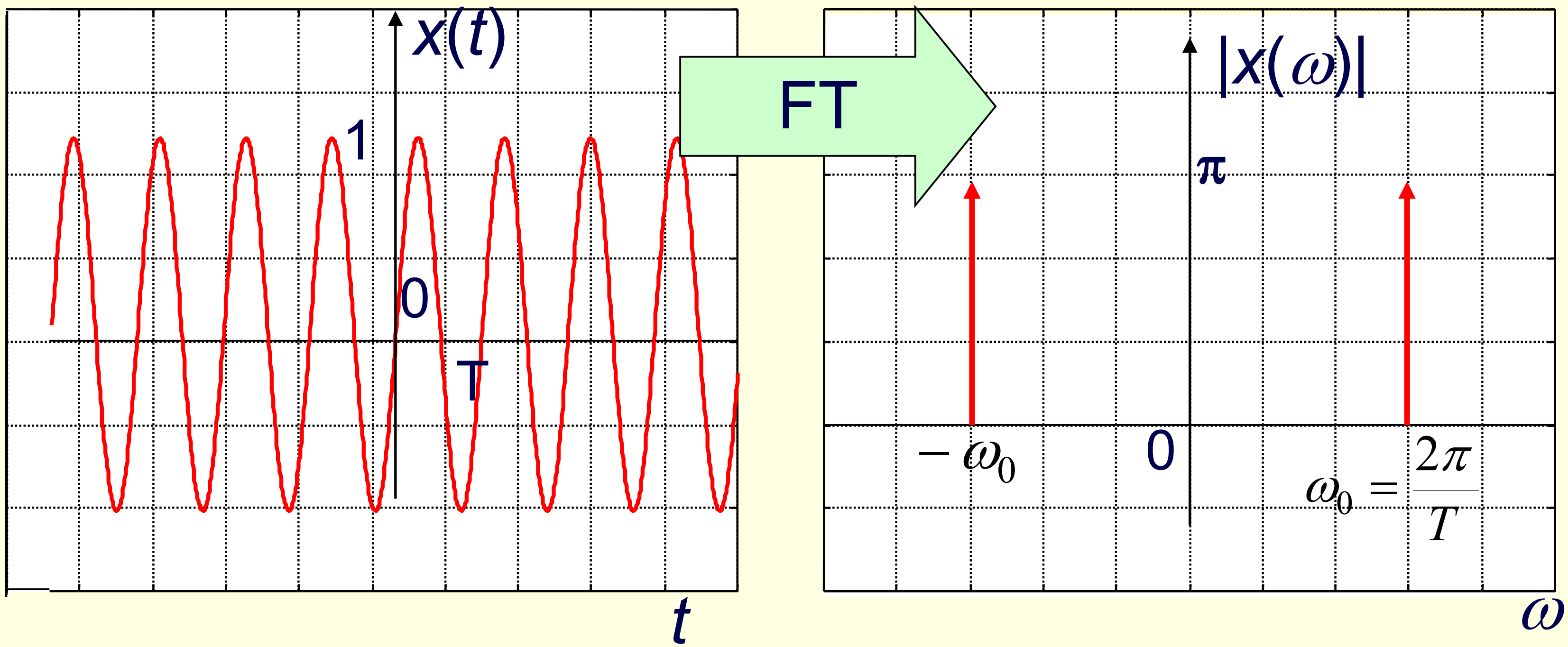
Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Widmo funkcji harmonicznej



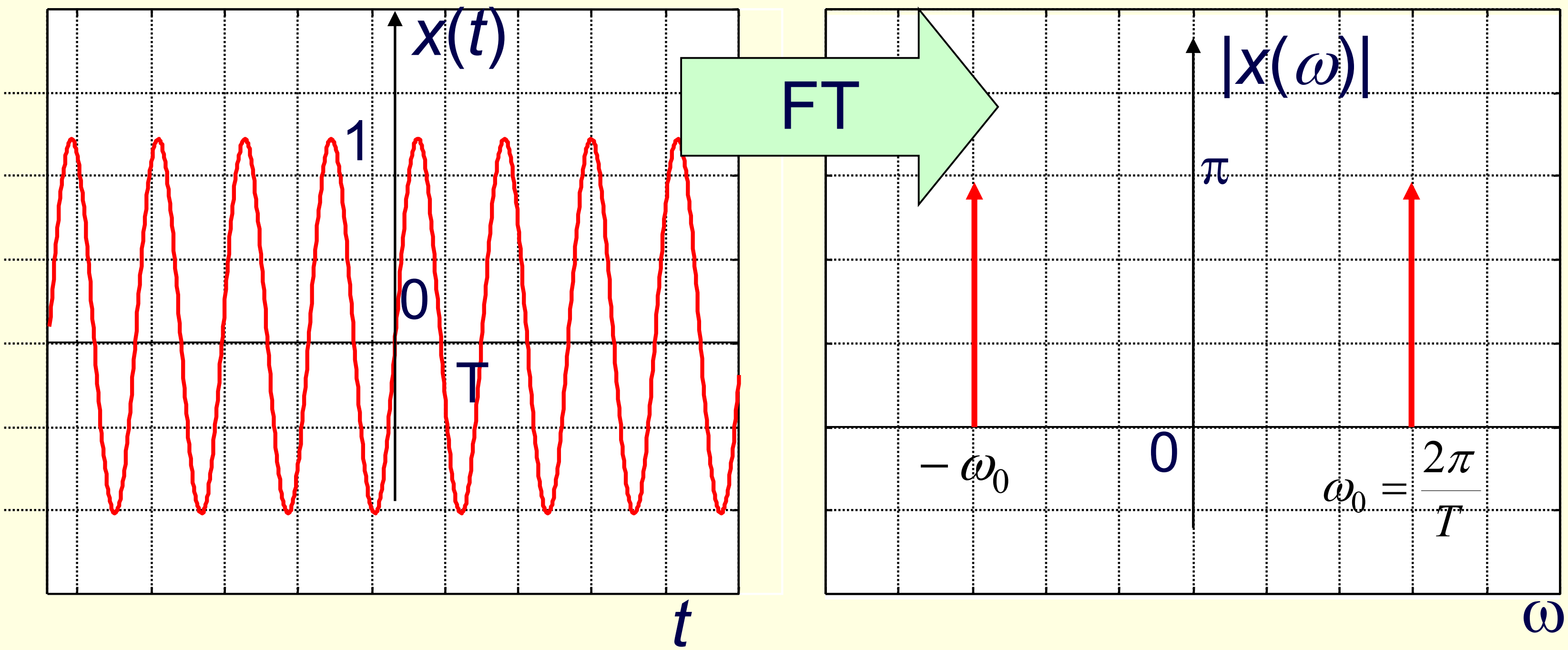
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Widmo funkcji harmonicznej



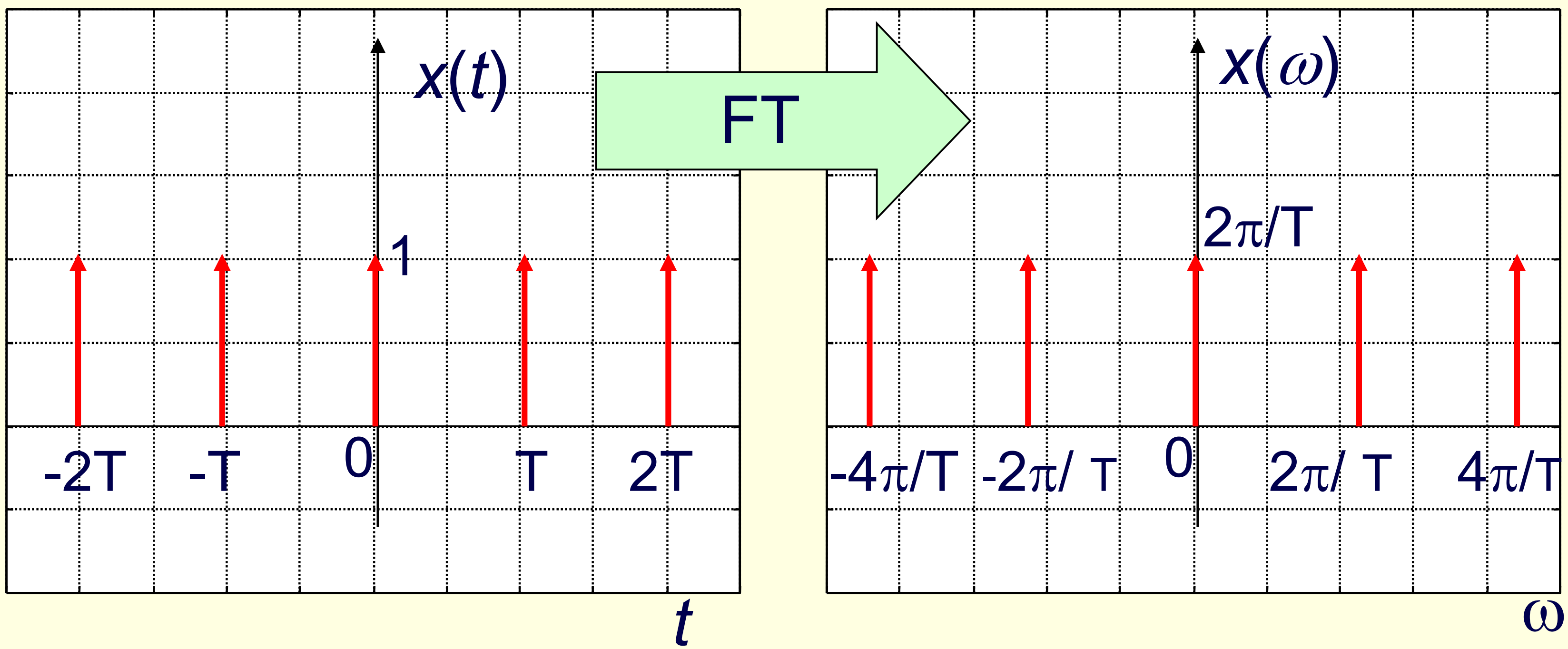
$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \leftrightarrow \quad -\frac{j}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Szereg impulsów Diraca



$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \leftrightarrow \quad -\frac{j}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Szereg impulsów jednostkowych



$$\delta_T(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) \quad \leftrightarrow \quad \omega_0\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$gdzie \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

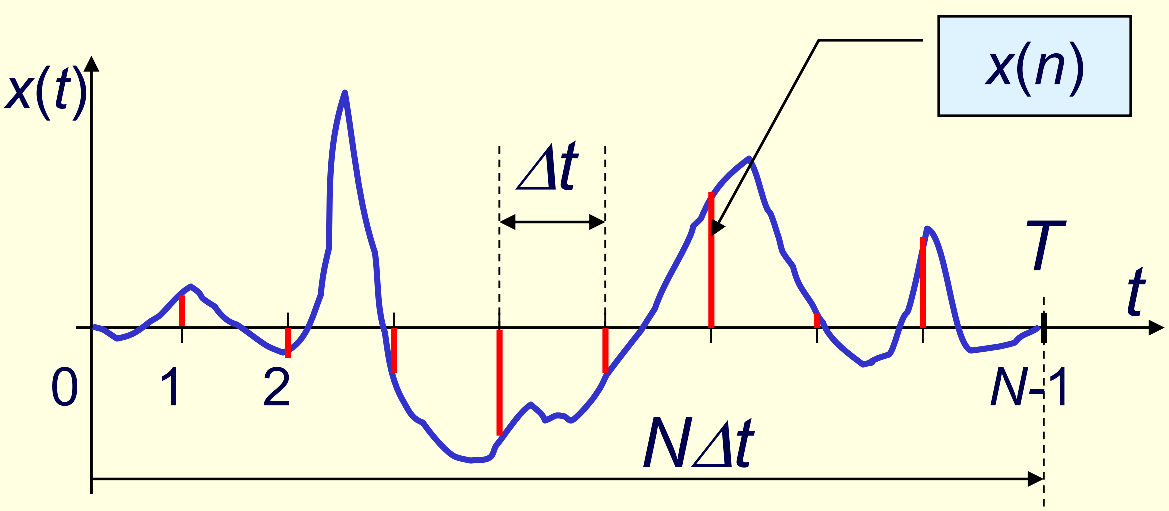
Niektóre właściwości przekształcenia Fouriera

1. Liniowość: $$ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(j\omega)+bY(j\omega)$$
2. Zmiana skali: $$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a>0$$
3. Splot sygnałów: $$x(t)*y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$$
4. Iloczyn sygnałów: $$x(t)y(t) \leftrightarrow X(j\omega)*Y(j\omega)$$
5. Równość Parsevala: $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$$
6. O modulacji: $$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

Sygnał okresowy $x(t)$ jest próbkowany N razy w czasie jego okresu T , tj. $T=N\Delta t$. Otrzymywany jest sygnał dyskretny $x(n)$ o okresie N:

$$\boxed{x(n) = x(n+N)}$$



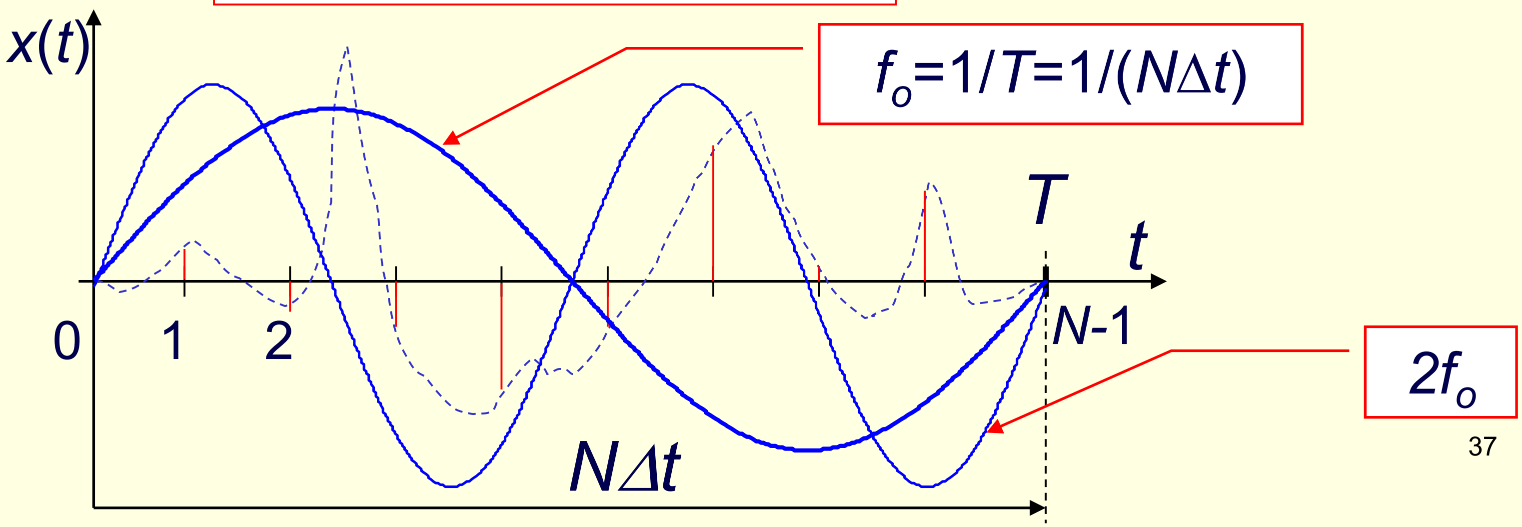
Dyskretne przekształcenie Fouriera

Najmniejsza częstotliwość szeregu Fouriera (tzw. częstotliwość podstawowa) wynosi:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

Częstotliwości kolejnych *k*-tych harmonicznych analizy:

$$kf_0 = \frac{k}{T} = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf_s}{N}$$



Dyskretne przekształcenie Fouriera

Z równania na szereg Fouriera i współczynniki szeregu dla czasu ciągłego :

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

mamy odpowiednie równania dla czasu dyskretnego:

$$X(k) = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N\Delta t}\right)n\Delta t} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$k=0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$n=0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

Proste:

indeks próbki w czasie

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, N\text{-}1$

numer harmonicznej

Odwrotne:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N\text{-}1$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k)=\left|X(k)\right|\cdot e^{j\arg\left(X(k)\right)}$$

Widmo amplitudowe

Widmo fazowe

Gdzie:

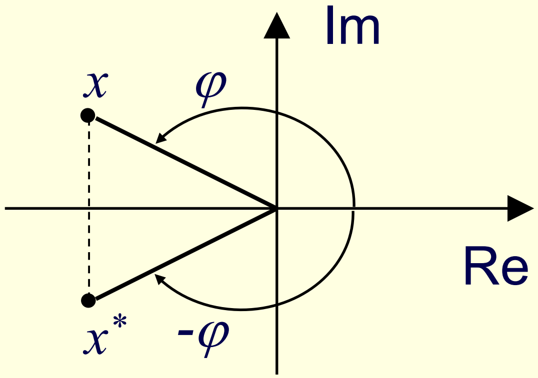
$$\left|X(k)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]^2+\mathrm{Im}\left[X(k)\right]^2}$$

$$\arg\left[X(k)\right]=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left[X(k)\right]}{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]}\right)$$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

Dla sygnałów o wartościach rzeczywistych $x(n)$ zachodzi własność współczynników Fouriera:

$$\boxed{X(k) = X^*(N-k)}$$



Zatem dla widma amplitudowego, tj. modułu współczynników):

$$\boxed{\left|X(k)\right| = \left|X(N-k)\right|}$$

a widma fazowego, tj. argumentu współczynników

$$\boxed{\arg\left[X(k)\right] = -\arg\left[X(N-k)\right]}$$

DFT - przykład

$$x(n) = [1\ 3\ 4\ 4]$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1=3} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$N=4$$

$$X(k=0) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1=3} x(n)e^{-j2\pi 0n/4} = \frac{1}{4}[x(0)+x(1)+x(2)+x(3)] = \frac{1}{4}[1+3+4+4] = 3$$

$$X(k=1) = ?\ldots.. = \frac{1}{4}(-3+j)$$

$$X(k=2) = ?\ldots.. = -\frac{1}{4}(2)$$

$$X(k=3) = ?\ldots.. = -\frac{1}{4}(3+j)$$

Wniosek – własność symetrii

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1=3}x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$N=4$

$$X(k=0)=3$$

$$X(k=1)=\frac{1}{4}(-3+j)$$

$$X(k=2)=-\frac{1}{4}(2)$$

$$X(k=3)=-\frac{1}{4}(3+j)$$

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right)=X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

$$\left|X\left(\frac{N}{2}+k\right)\right|=\left|X\left(\frac{N}{2}-k\right)\right|$$

Widmo amplitudowe: funkcja parzysta

$$\arg\left(X\left(\frac{N}{2}+k\right)\right)=-\arg\left(X\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)$$

Widmo fazowe: funkcja nieparzysta

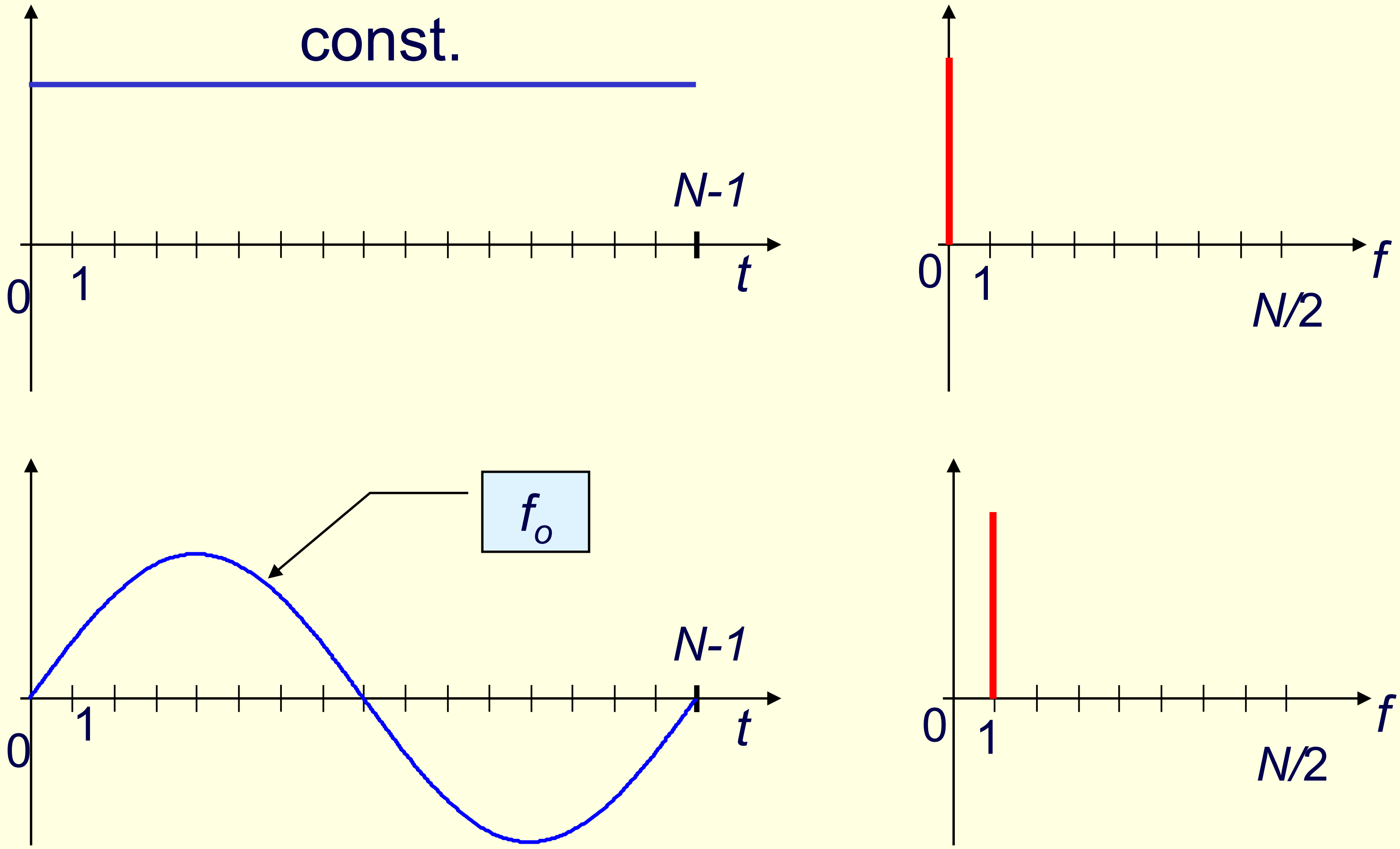
Dyskretne przekształcenie Fouriera

Widmo N- punktowego przekształcenia Fouriera ma okres N, tj.:

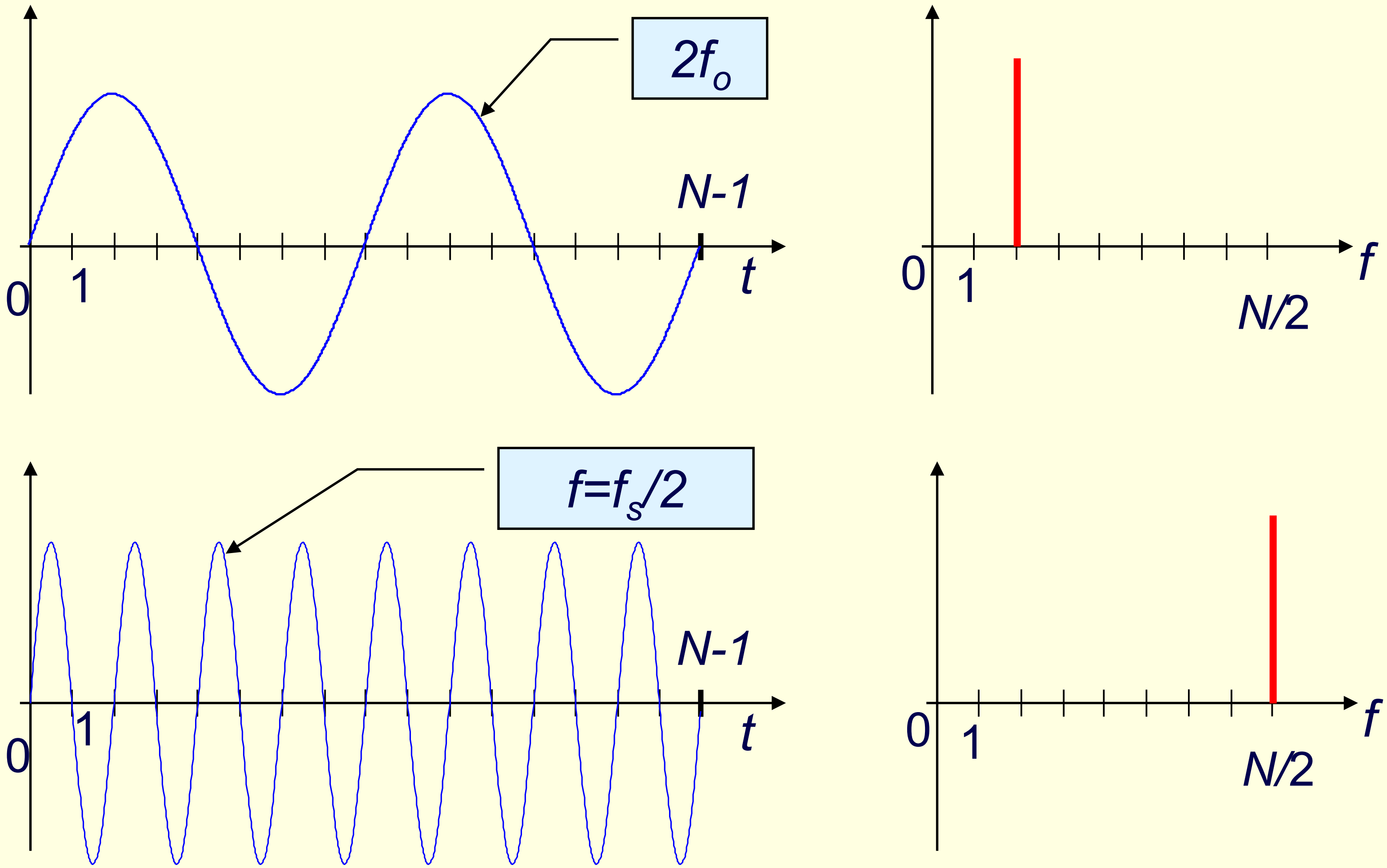
$$\boxed{X(k) = X(k+N)}$$

$$X(k+N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \underbrace{e^{-j2\pi kn}}_{=\,?} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = X(k)$$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

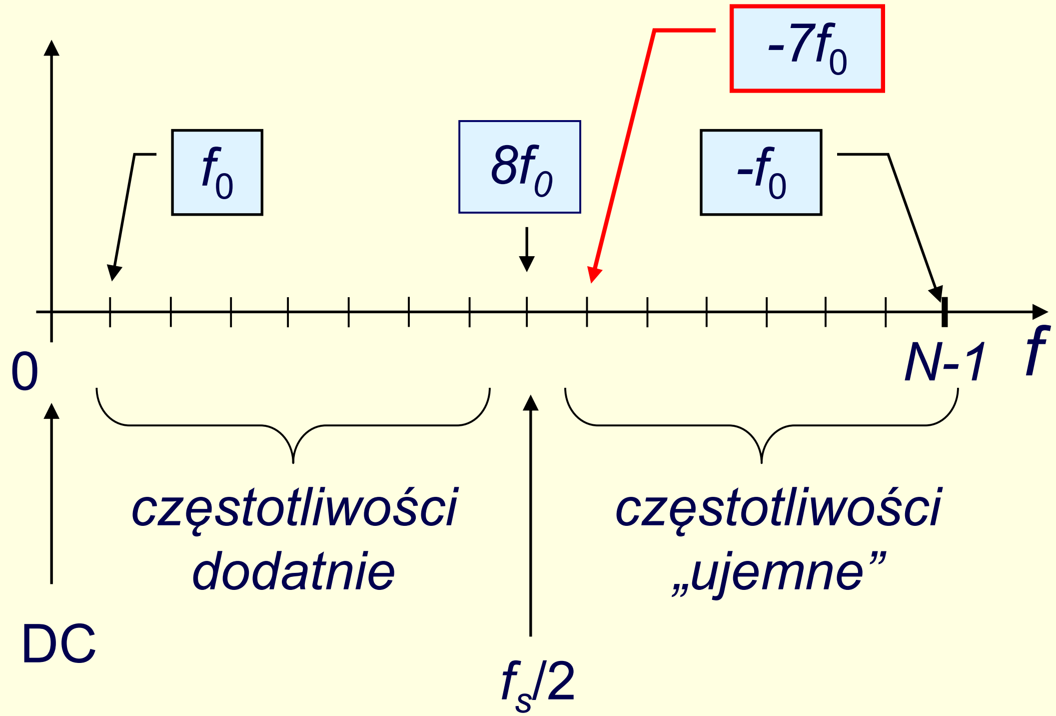


Dyskretne przekształcenie Fouriera



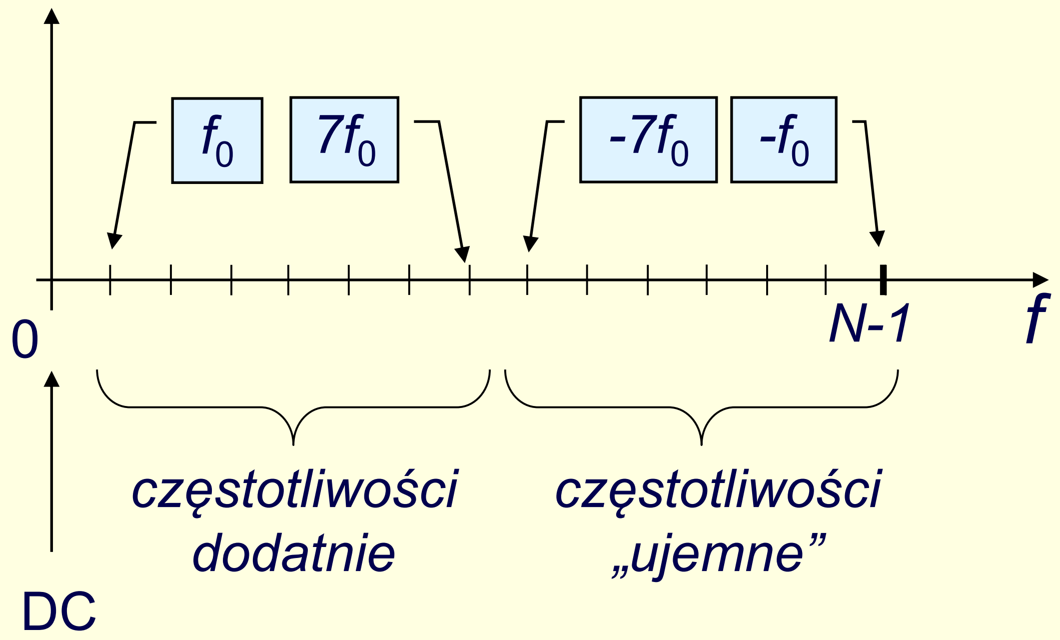
Dyskretne przekształcenie Fouriera

N - parzyste (N=16)



Dyskretne przekształcenie Fouriera

N - nieparzyste (N=15)

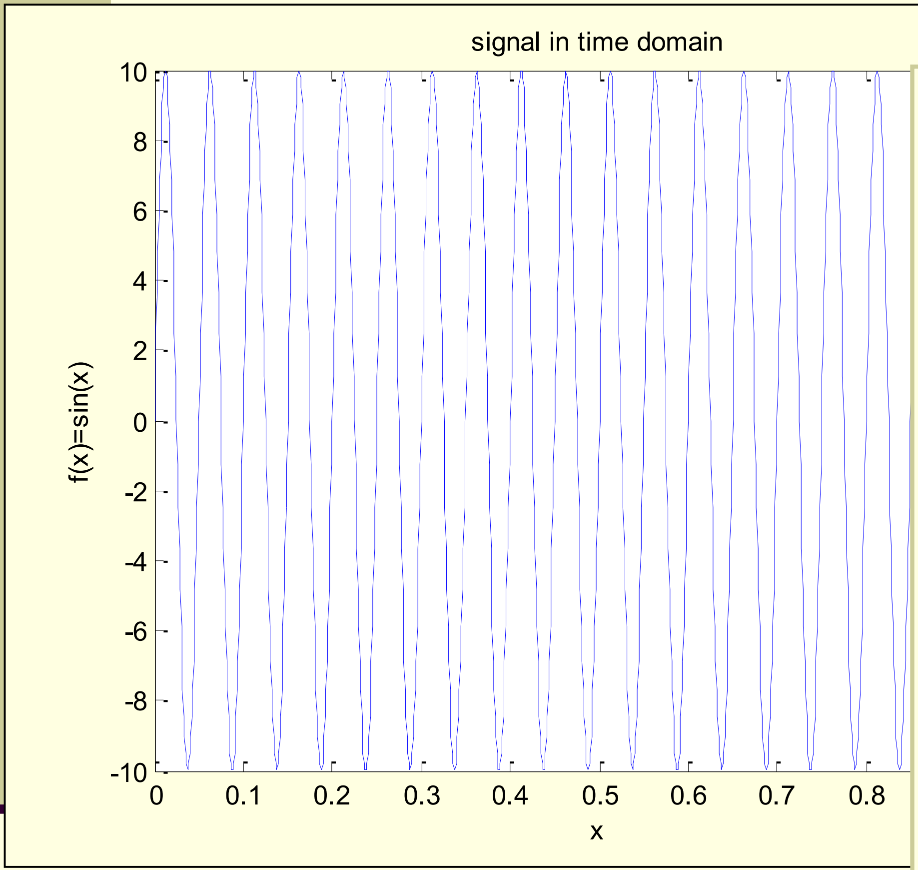


Przykłady widma Fouriera sygnałów

Ćwiczenie komputerowe:

- Utwórz N=2000 próbek sygnału harmonicznego $x(t)=A sin(2\pi f_x t)$, gdzie A=10, f_x=20 Hz, który spróbkowano z częstotliwością f_s=1000 Hz.
- Wykreśl ten sygnał, wyznacz jego widma częstotliwościowe i je wykreśl.
- Oblicz odwrotną transformację Fouriera i otrzymany sygnał porównaj z przebiegiem oryginalnym.

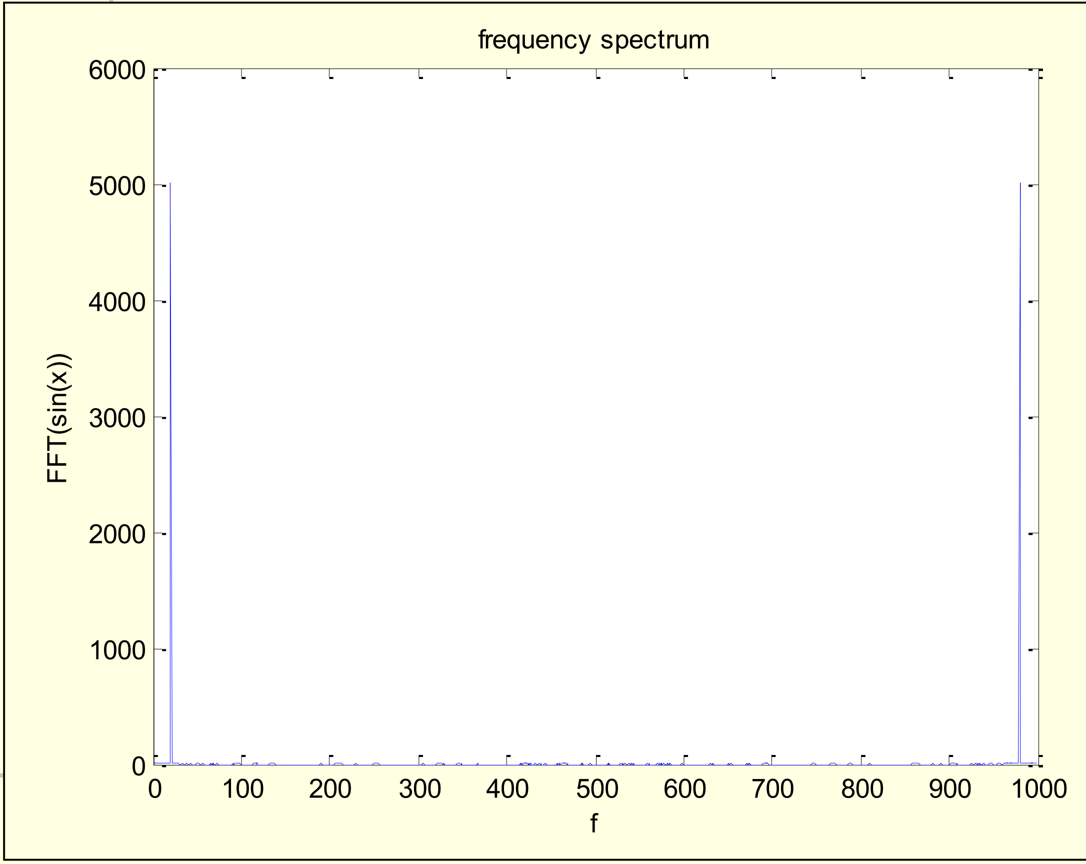
Przykłady




```
N=2000     #number of samples
A=10      #amplitude
fx=20      #sinusoid frequency
fs=1000    #sampling frequency
T=N/fs     #time range
#time scale
t=arange(0,T,1.0/fs)

#sinusoid sample values
x=A*sin(2*pi*fx*t)

#plotting
figure(1)
plot(t,x)
title('signal in time domain')
xlabel('Time [s]')
ylabel('f(x)=sin(x)')
```

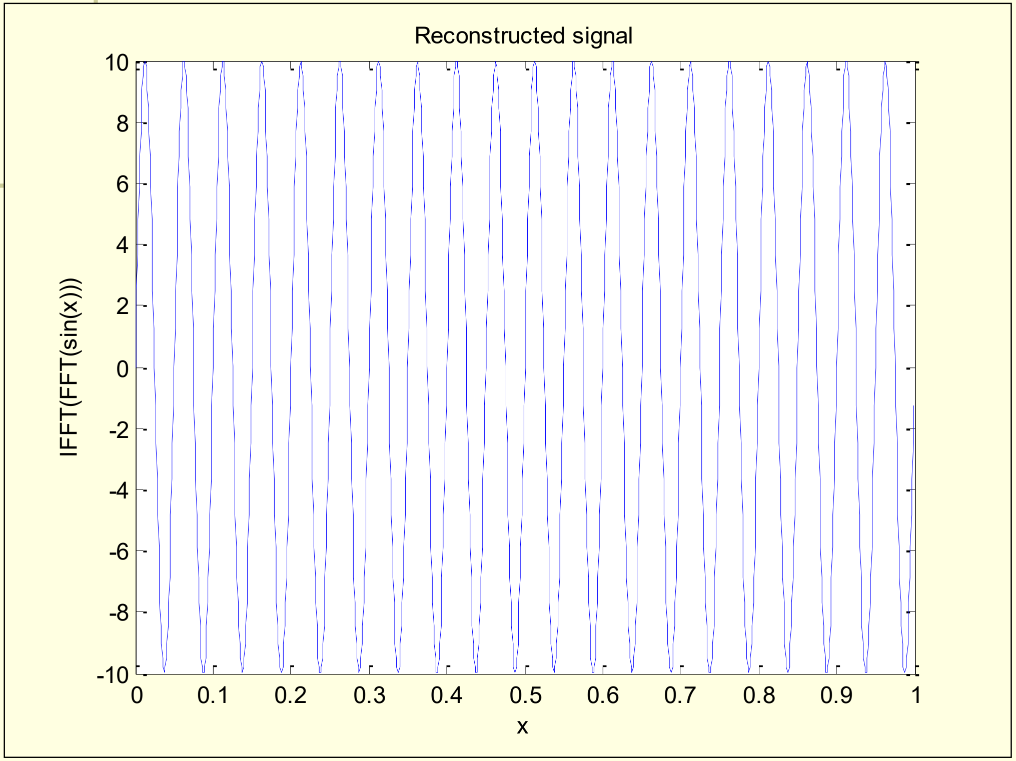
Przykłady

```
#frequency base determination
f0=float(fs)/N
f=arange(0,N*f0,f0)

#determination of Fourier
   coefficients
X=fft(x)

#plotting
figure
plot(f,abs(X))
title('frequency spectrum')
xlabel('f')
ylabel('FFT(sin(x))')
```



Przykłady

```
#inverse
iX=ifft(X)
figure; plot(t,real(iX))
title('Reconstructed signal')
xlabel('x')
ylabel('IFFT(FFT(sin(x)))')
```



Przykłady widma Fouriera sygnałów

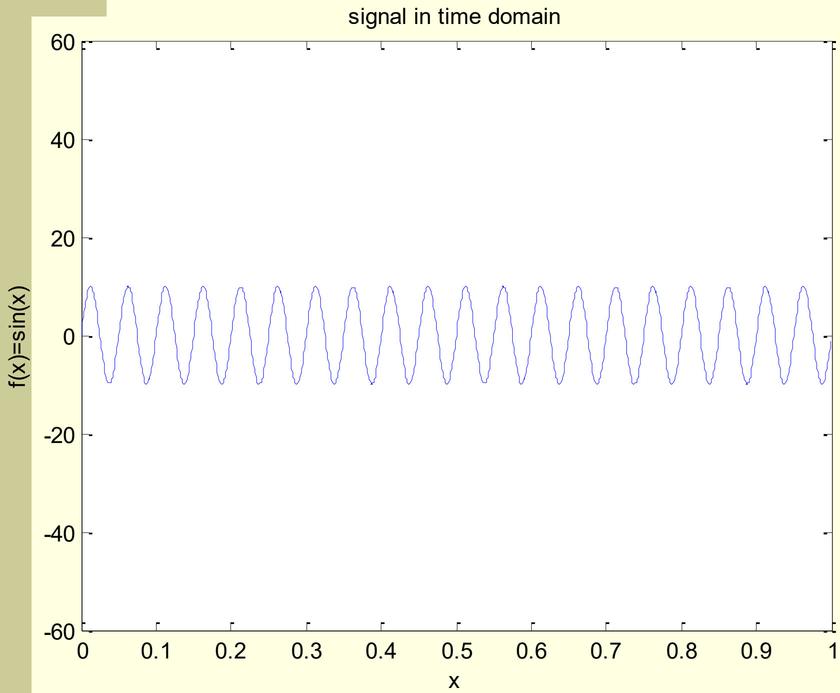
Ćwiczenie komputerowe:

Do utworzonego w poprzednim ćwiczeniu sygnału harmonicznego dodaj zakłócenie Gaussowskie o odchyleniu standardowym σ=20 (`20*randn(1,1000)`);

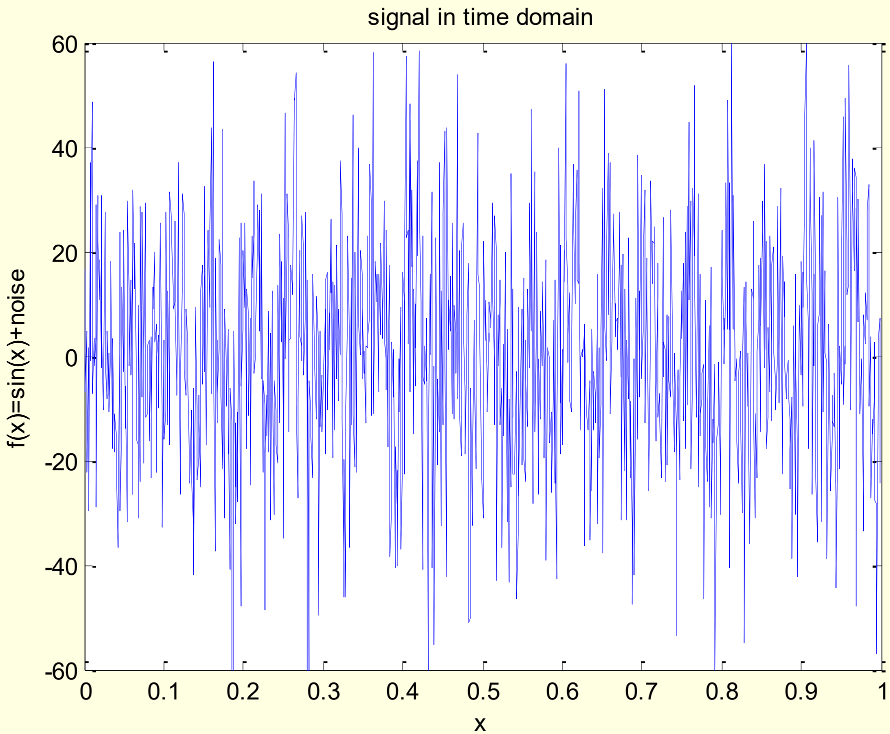
Wyświetl sygnał zakłócony. Czy można wnioskować o częstotliwości harmonicznej na podstawie przebiegu czasowego?

Wyznacz widmo częstotliwościowe zakłóconego sygnału harmonicznego i określ główną składową harmoniczną tego sygnału.

Przykłady

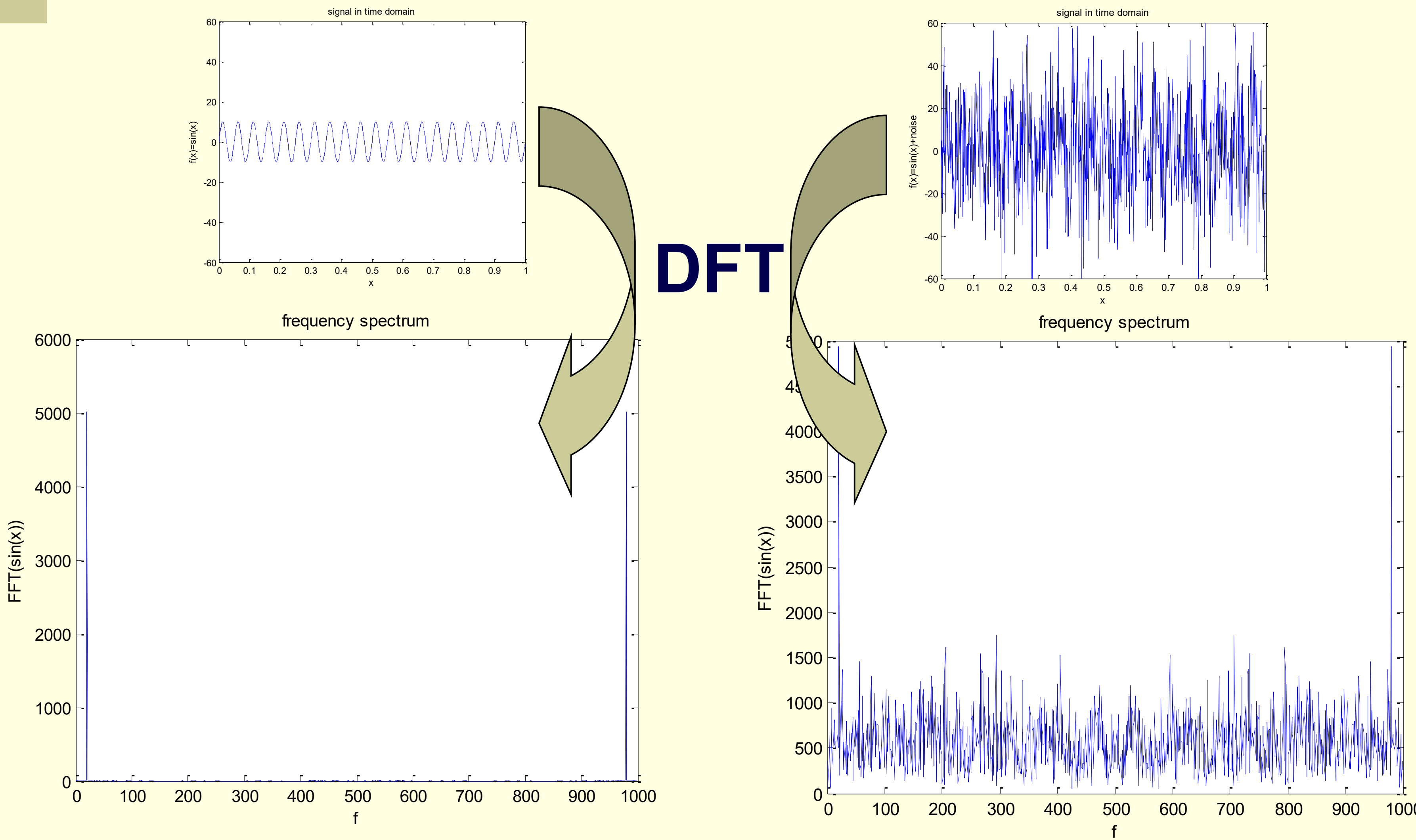


signal in time domain
f(x)=sin(x)
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x



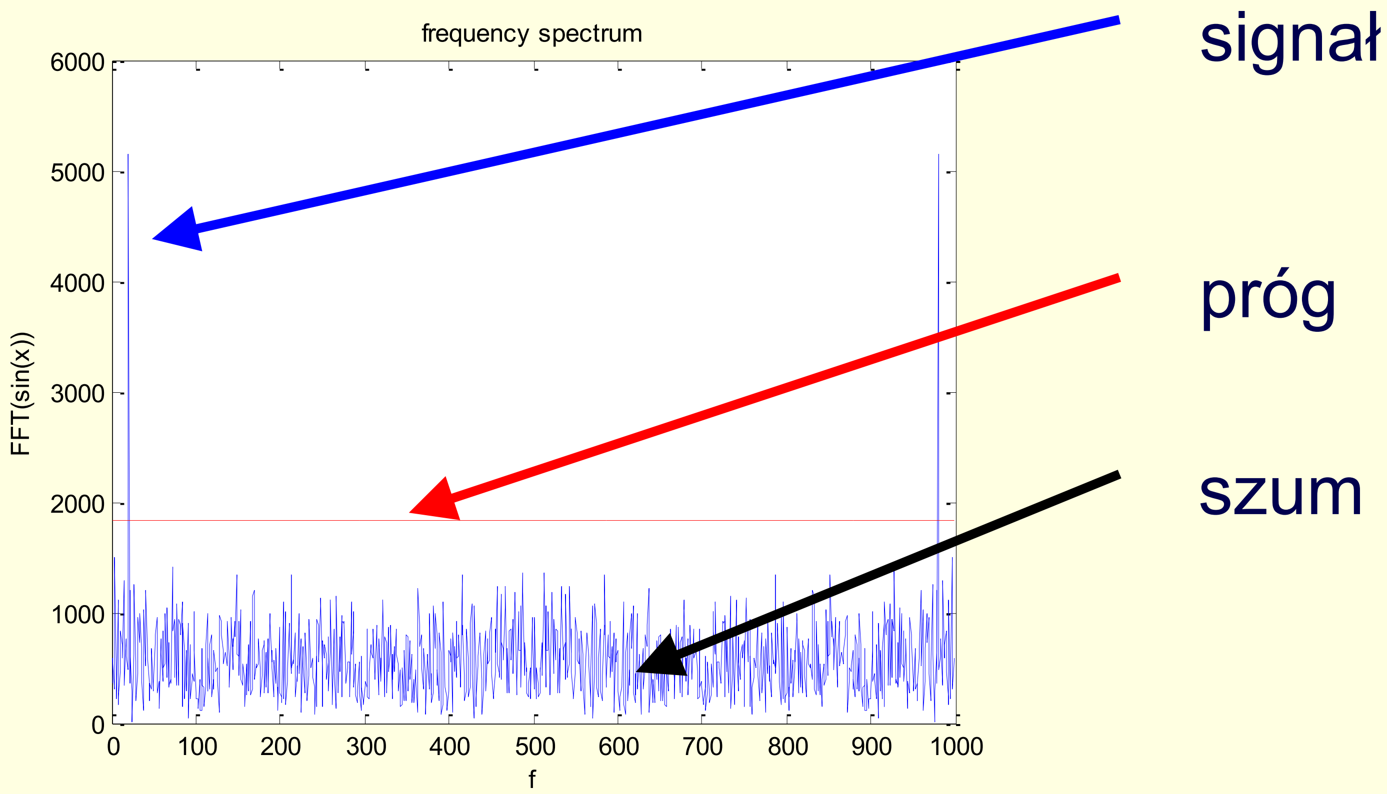
signal in time domain
f(x)=sin(x)+noise
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

Przykłady

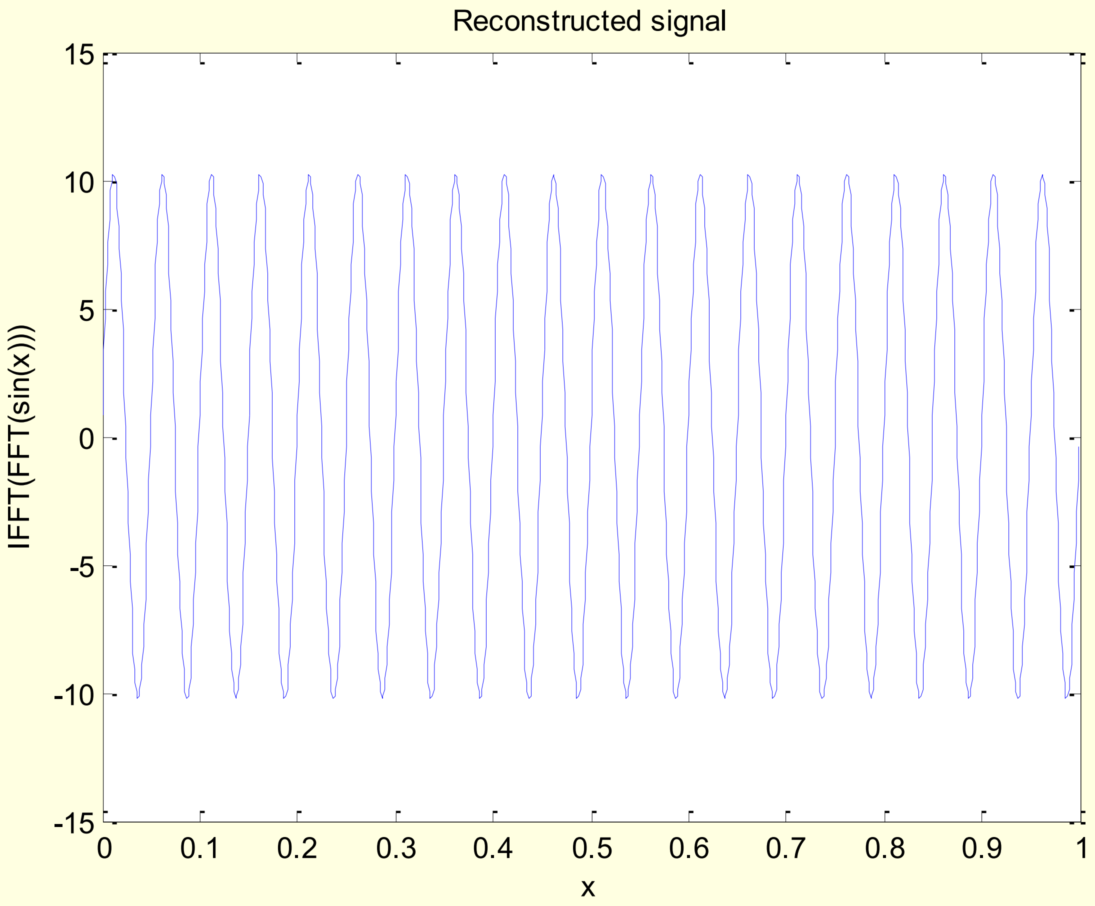


signal in time domain
f(x)=sin(x)
x
DFT
signal in time domain
f(x)=sin(x)+noise
x
frequency spectrum
FFT(sin(x))
f
frequency spectrum
FFT(sin(x))
f

Przykłady


frequency spectrum
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
FFT(sin(x))
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
f
signał
próg
szum

Przykłady


Reconstructed signal
15
10
5
0
-5
-10
-15
IFFT(FFT(sin(x)))
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

Przykłady widma Fouriera sygnałów

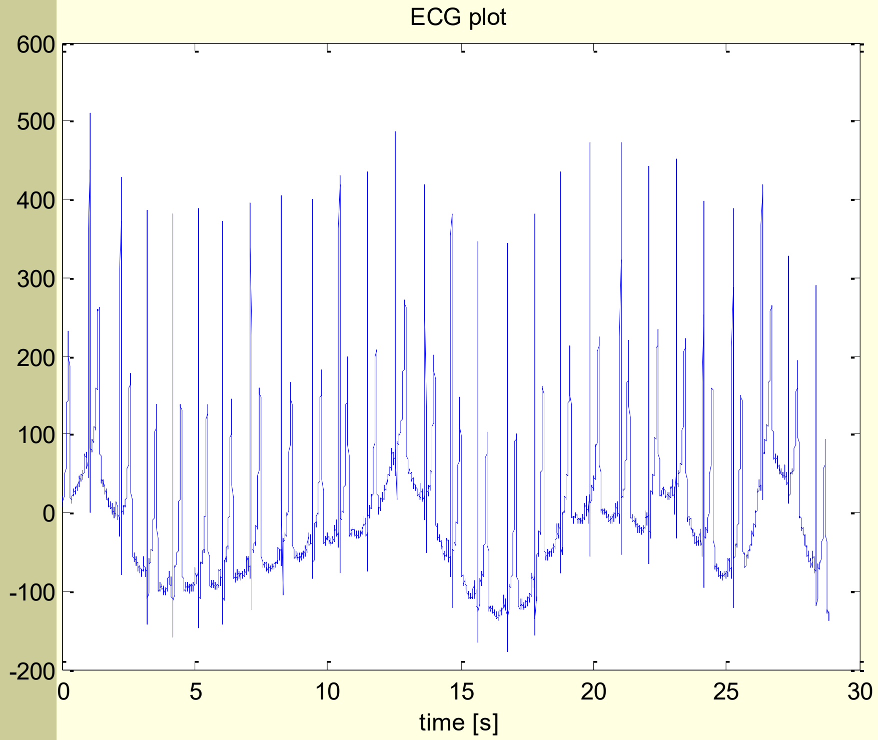
Ćwiczenie komputerowe:

Wyznacz i wykreśl częstotliwościowe widmo amplitudowe sygnału `ecg_mit.mat` spróbkowanego z częstotliwością f_s=360 Hz pochodzącego z bazy MIT/BIH Arrhytmia Database (*pamiętaj o usunięciu składowej stałej sygnału przed wyznaczeniem transformaty, zastosuj 1024 punktową DFT*).

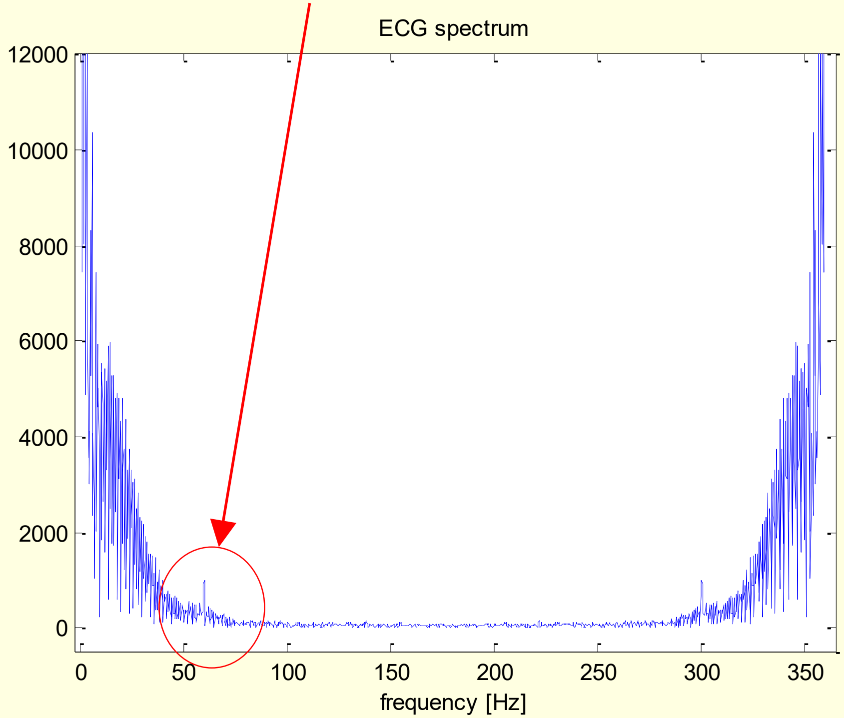
Scharakteryzuj widmo sygnału EKG.

Czy zauważasz częstotliwość harmonicznej od sieci energetycznej?

Przykłady



Częstotliwość sieci energetycznej 60Hz



Koszt obliczeniowy przekształcenia Fouriera

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad dla \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j0\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

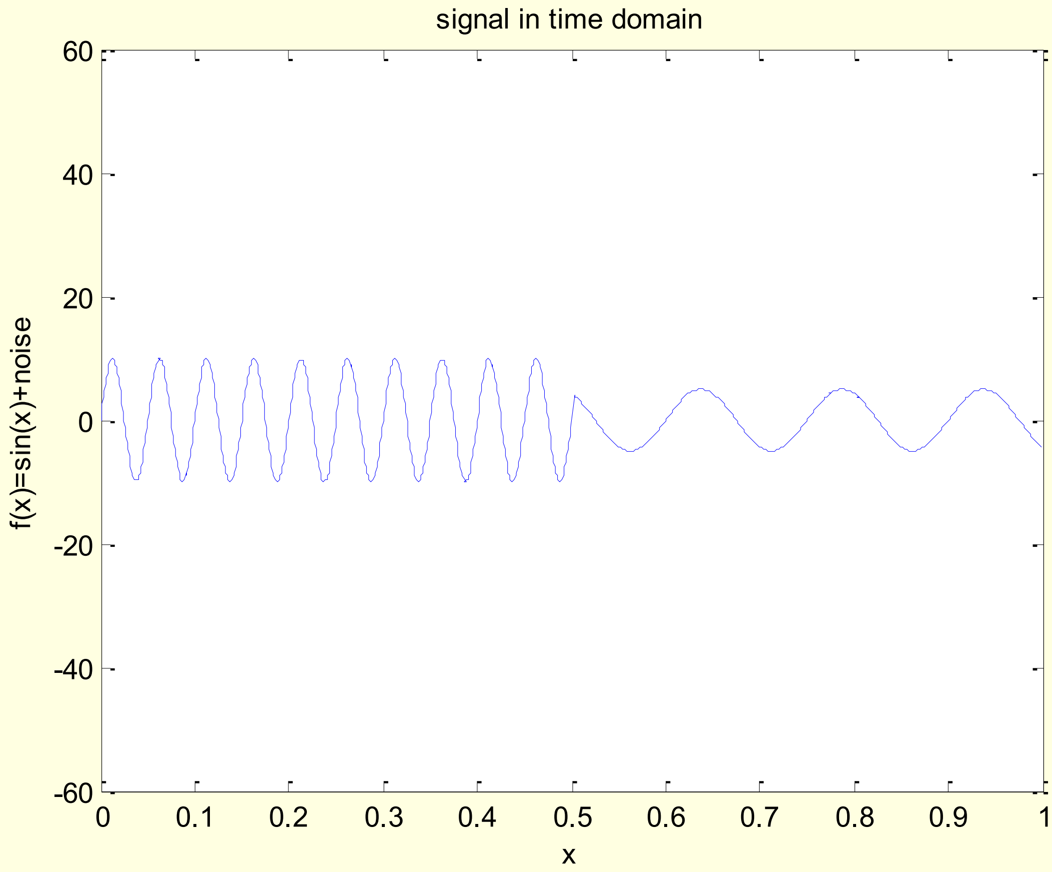
jeden prążek

N	N^2 (FT)	NlogN (FFT)	Zysk N/logN
16	256	64	4
256	65535	2048	32
512	262144	4608	64
2048	~4e6	22528	186

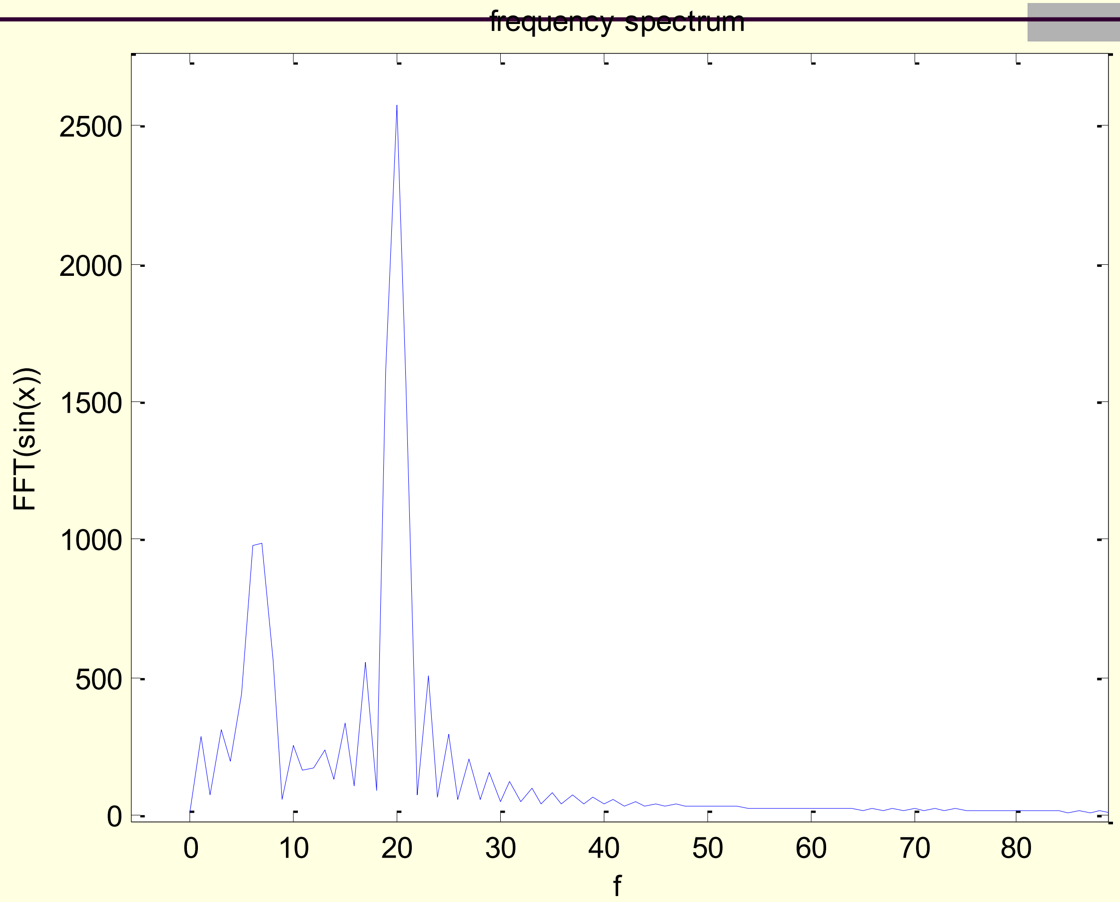
W tzw. szybkim przekształceniu Fouriera (ang. **Fast Fourier Transform – FFT**) wykorzystuje się symetrie i okresowość zespolonych harmonicznych

Short Time Fourier Transform

Rozważmy sygnał:

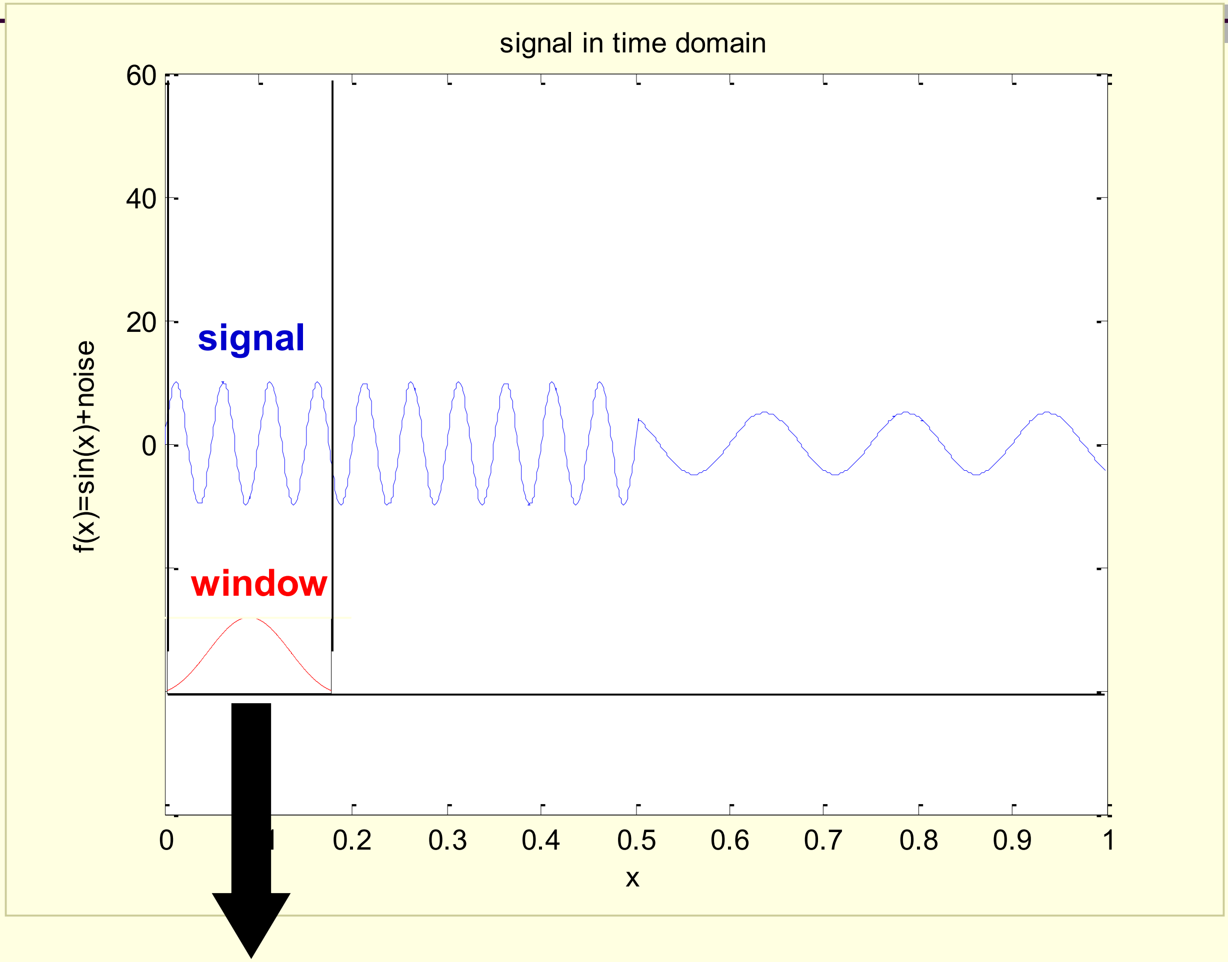


Short Time Fourier Transform



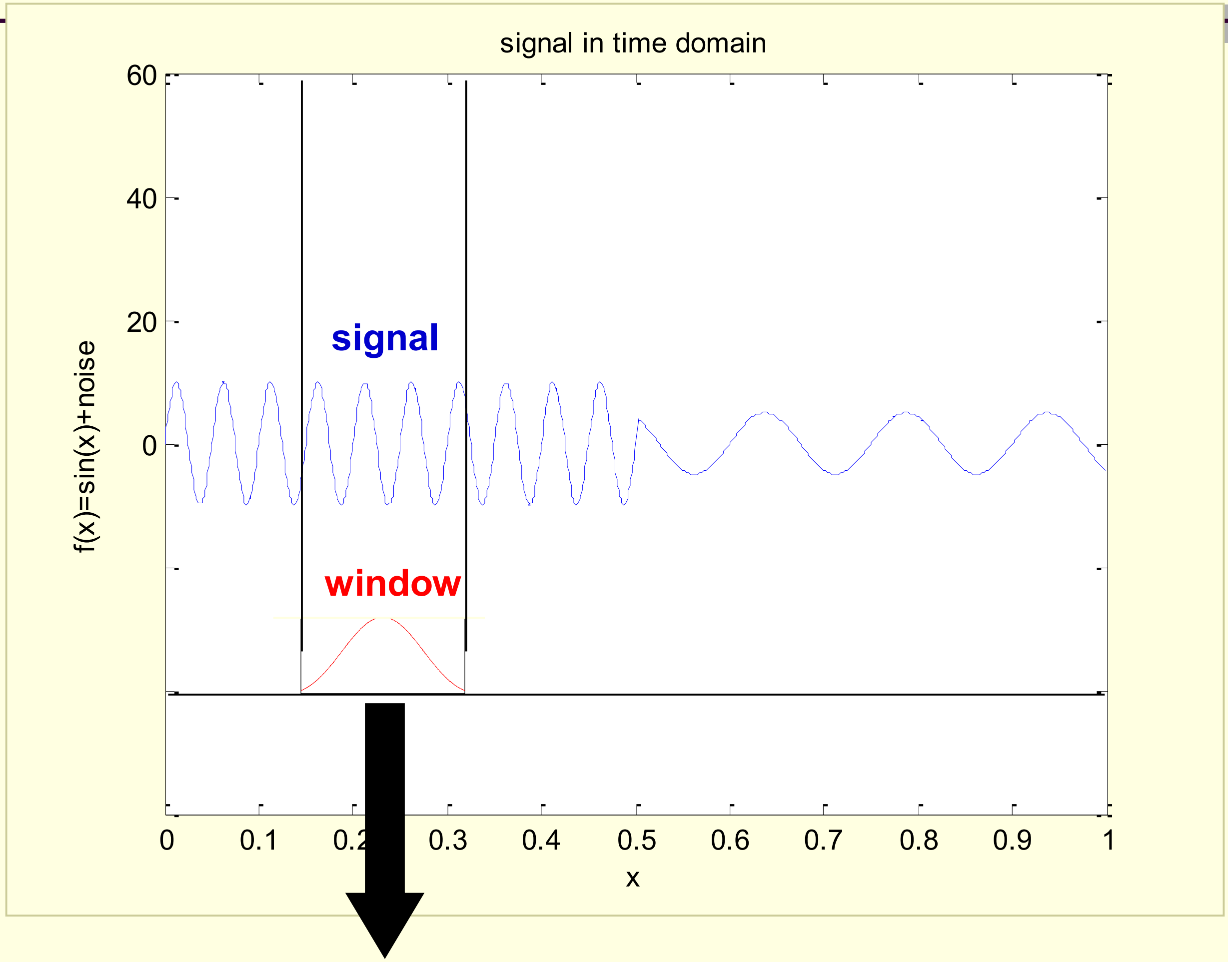
Jaką informację tracimy w widmie częstotliwościowym?

Short Time Fourier Transform



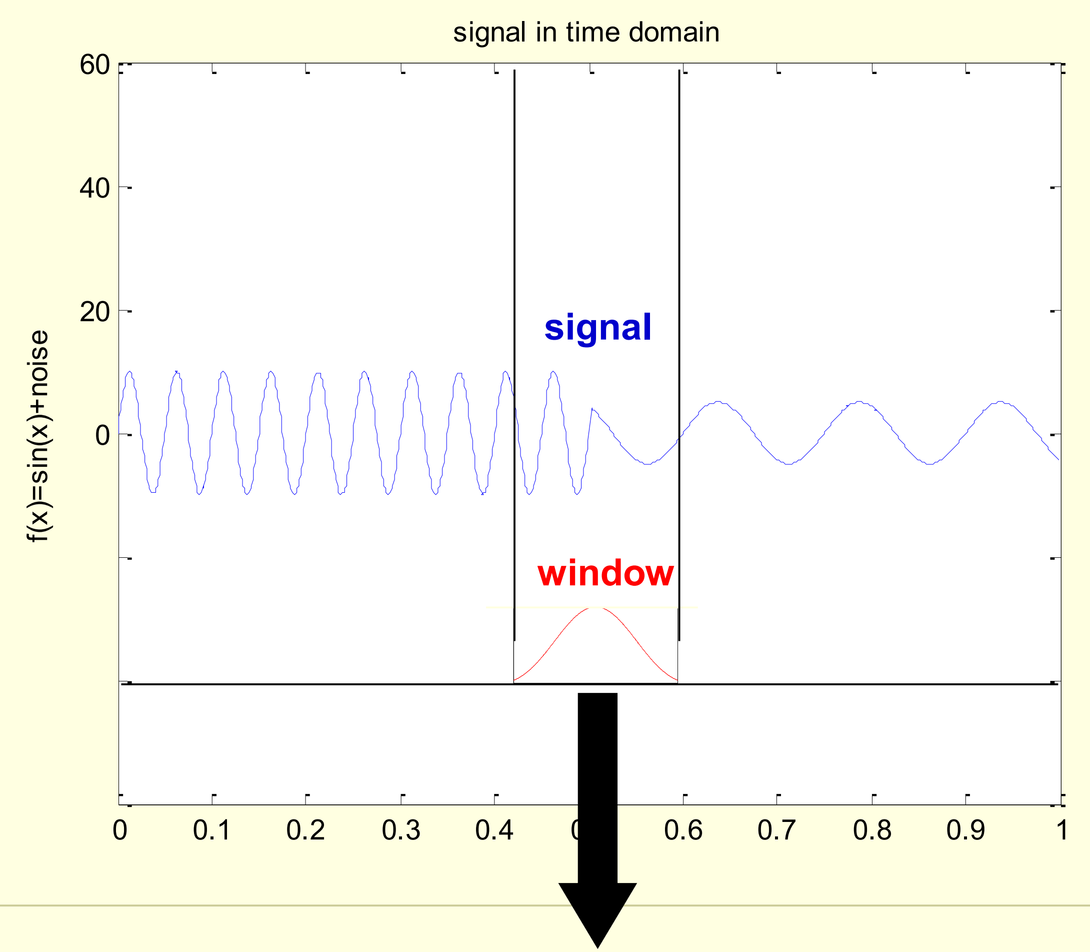
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



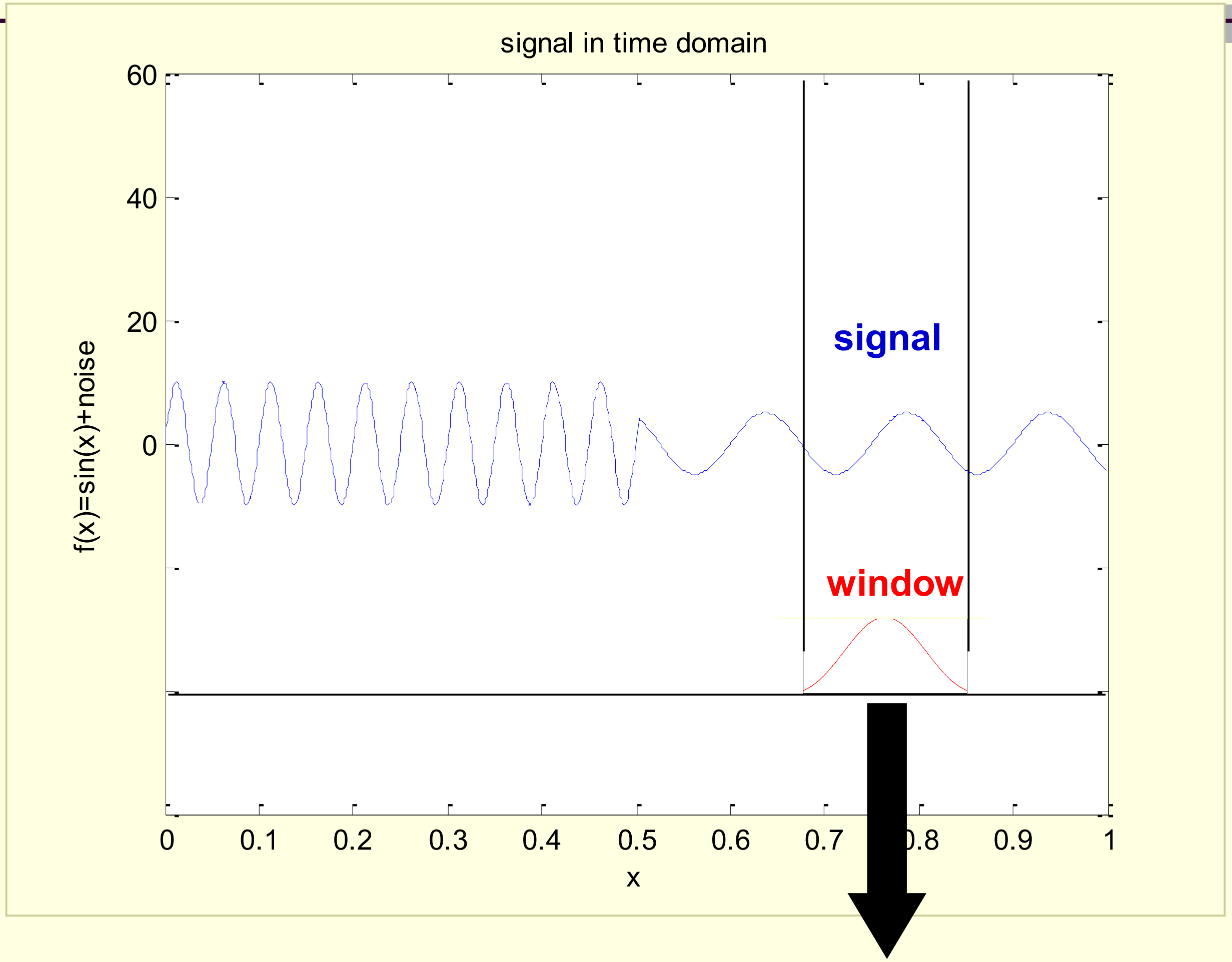
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



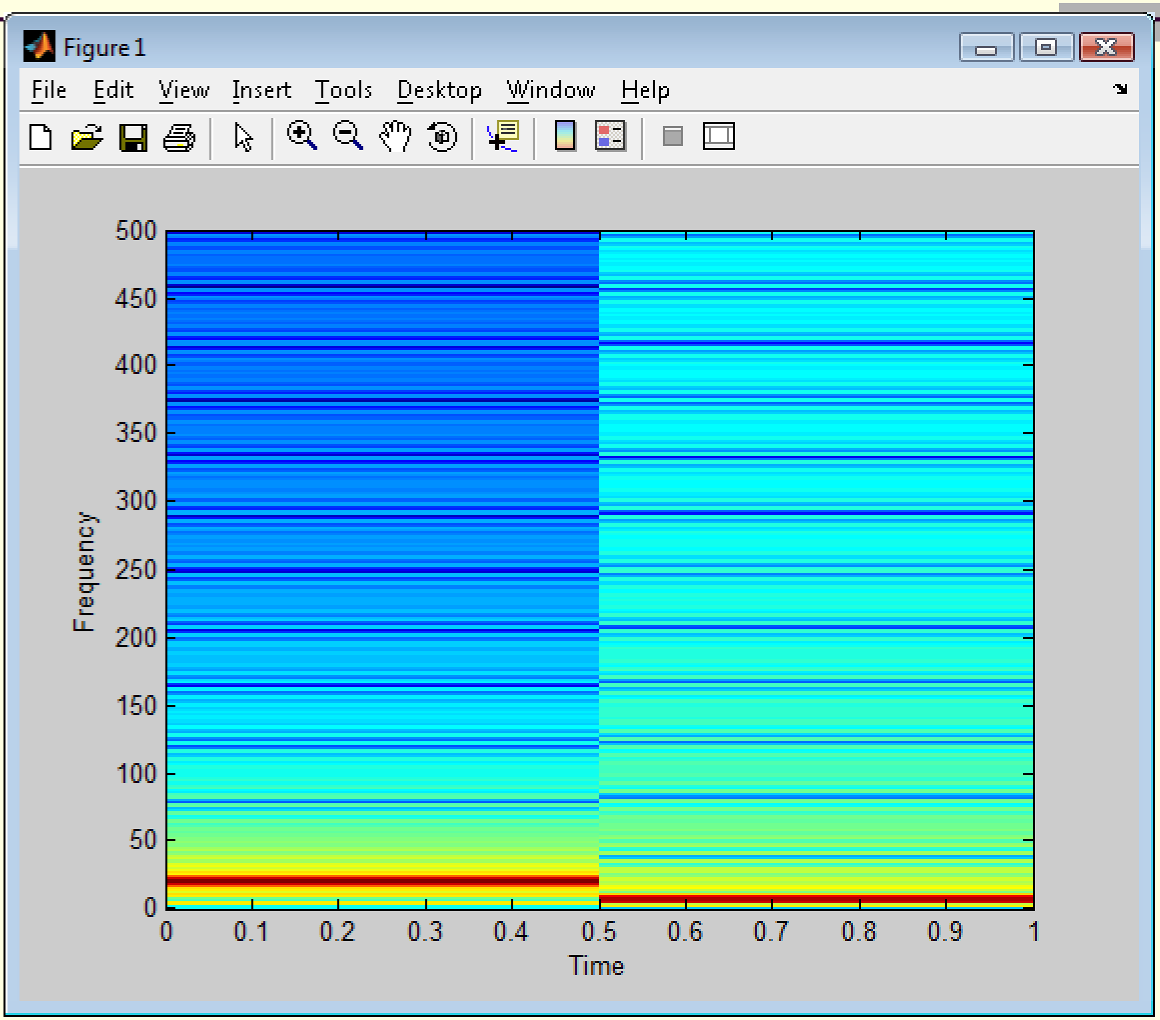
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



Short Time Fourier Transform

$$STFT(x(n)) = X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n-m)e^{-j\omega n}$$

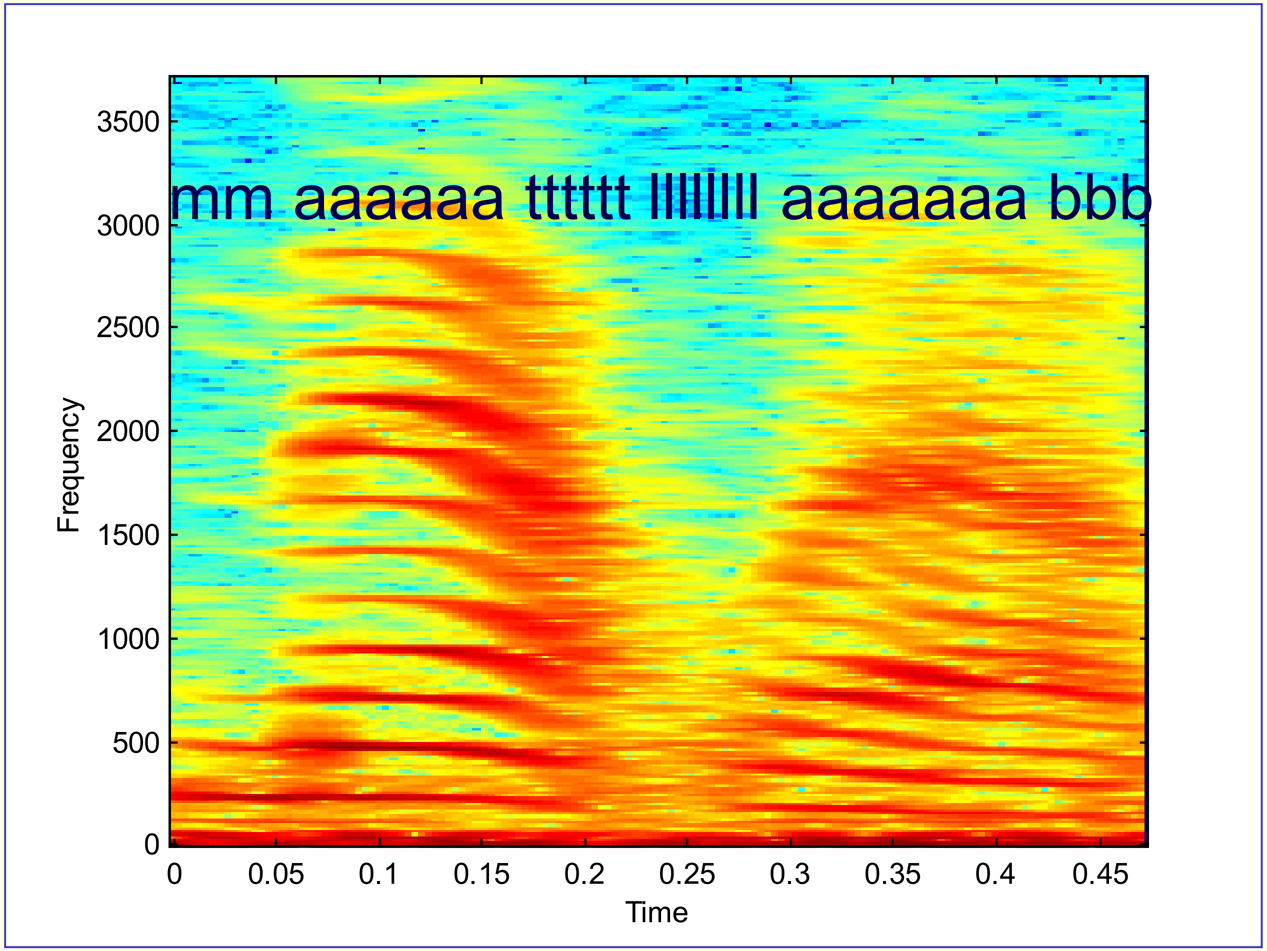
sygnał

Dyskretny czas

Dyskretna częstotliwość

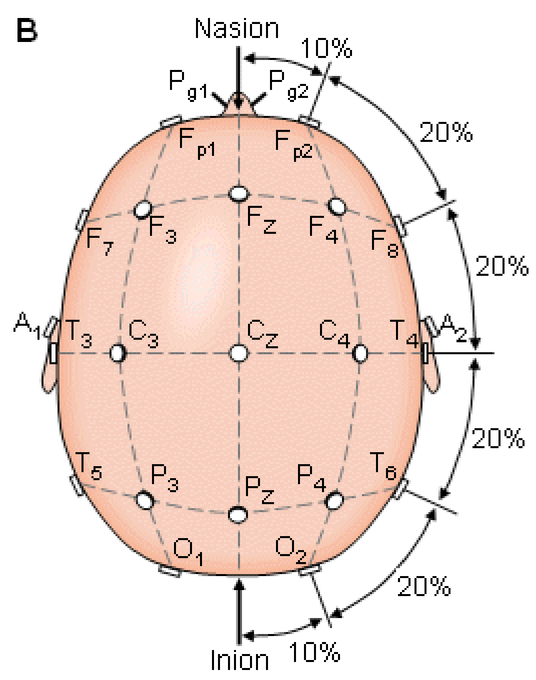
funkcja okna

Krótkookresowa transformacja Fouriera



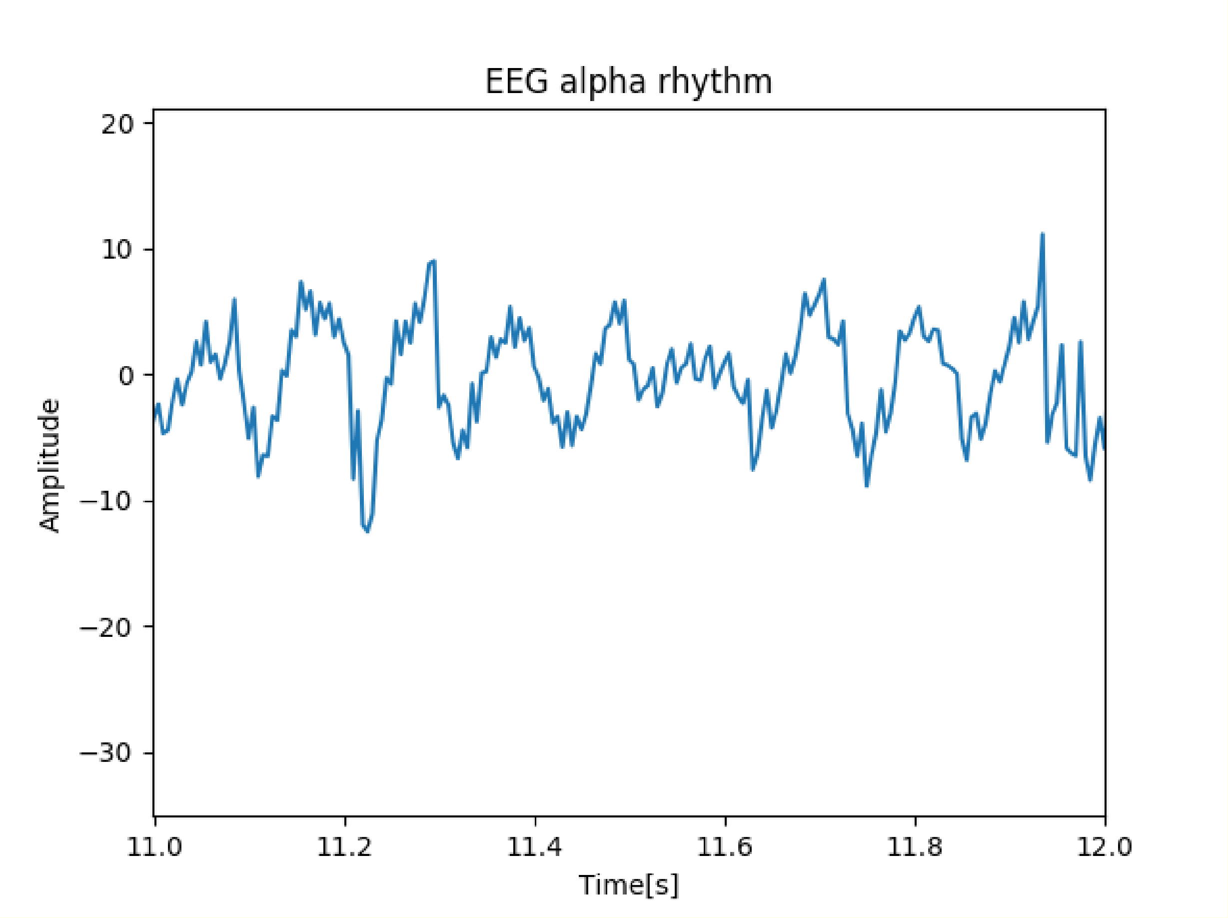
Elektroencefalografia

Elektroencefalografia – metoda pomiaru i zapisu aktywności elektrycznej mózgu

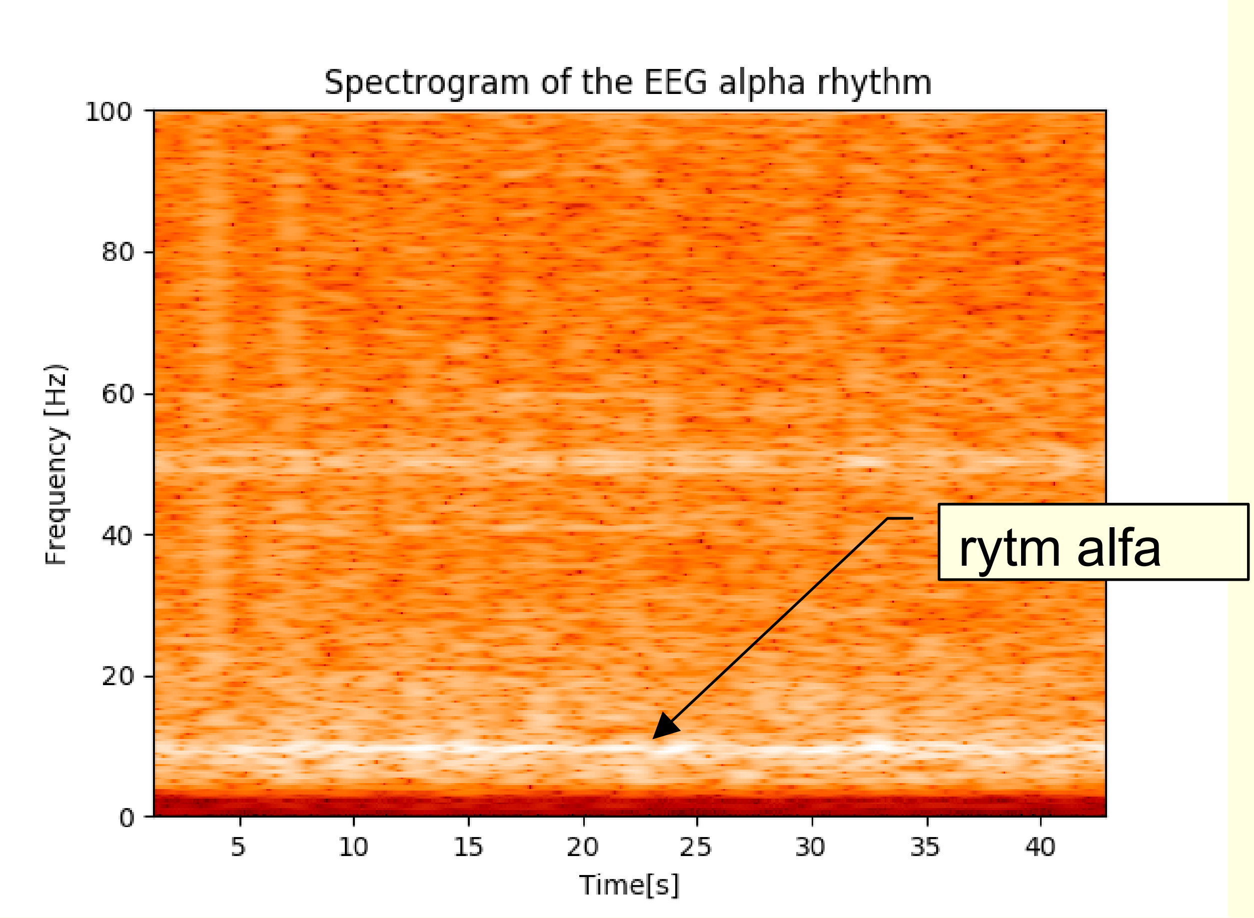


Standardowy układ elektrod EEG (system10/20)

Sygnał EEG

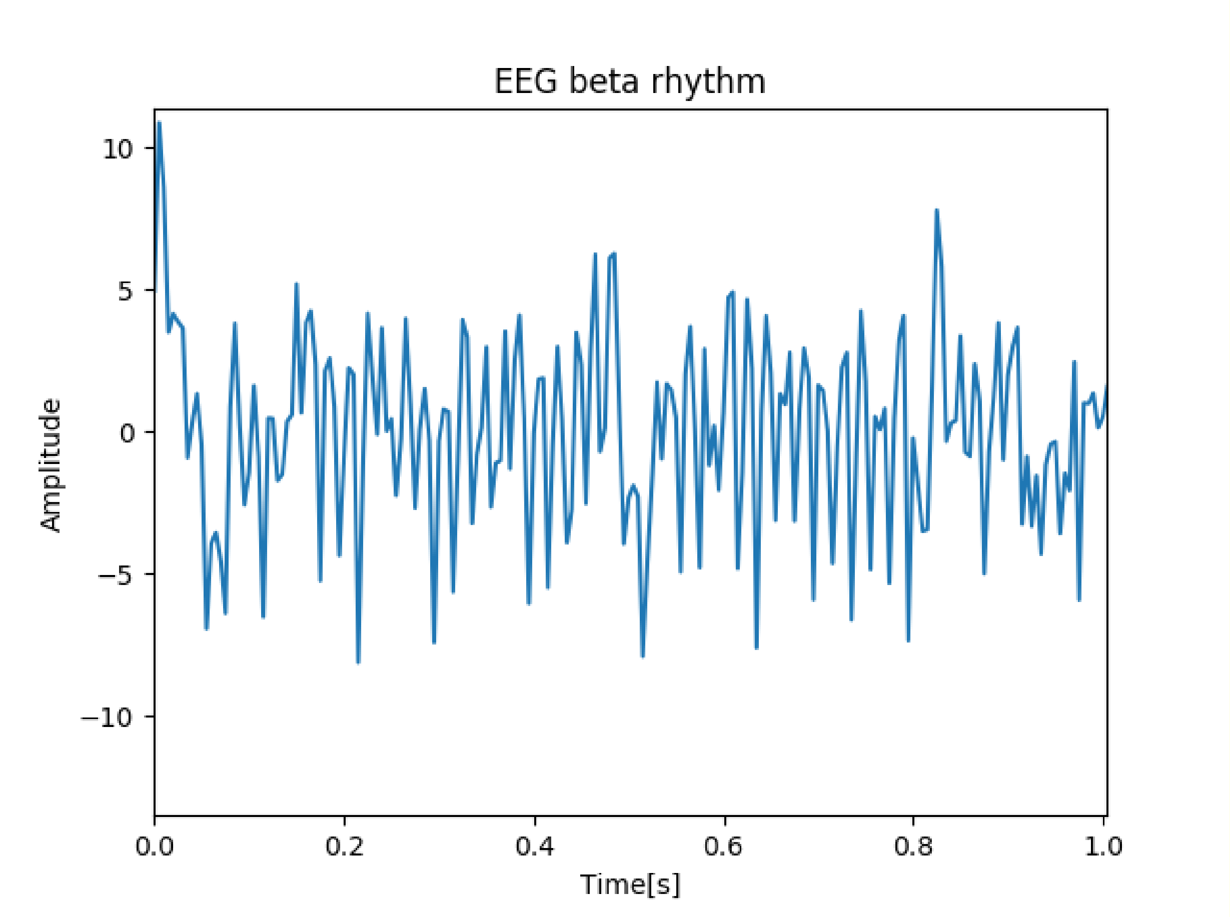

EEG alpha rhythm
Amplitude
Time[s]
20
10
0
−10
−20
−30
11.0
11.2
11.4
11.6
11.8
12.0

Krótkookresowa transformacja Fouriera

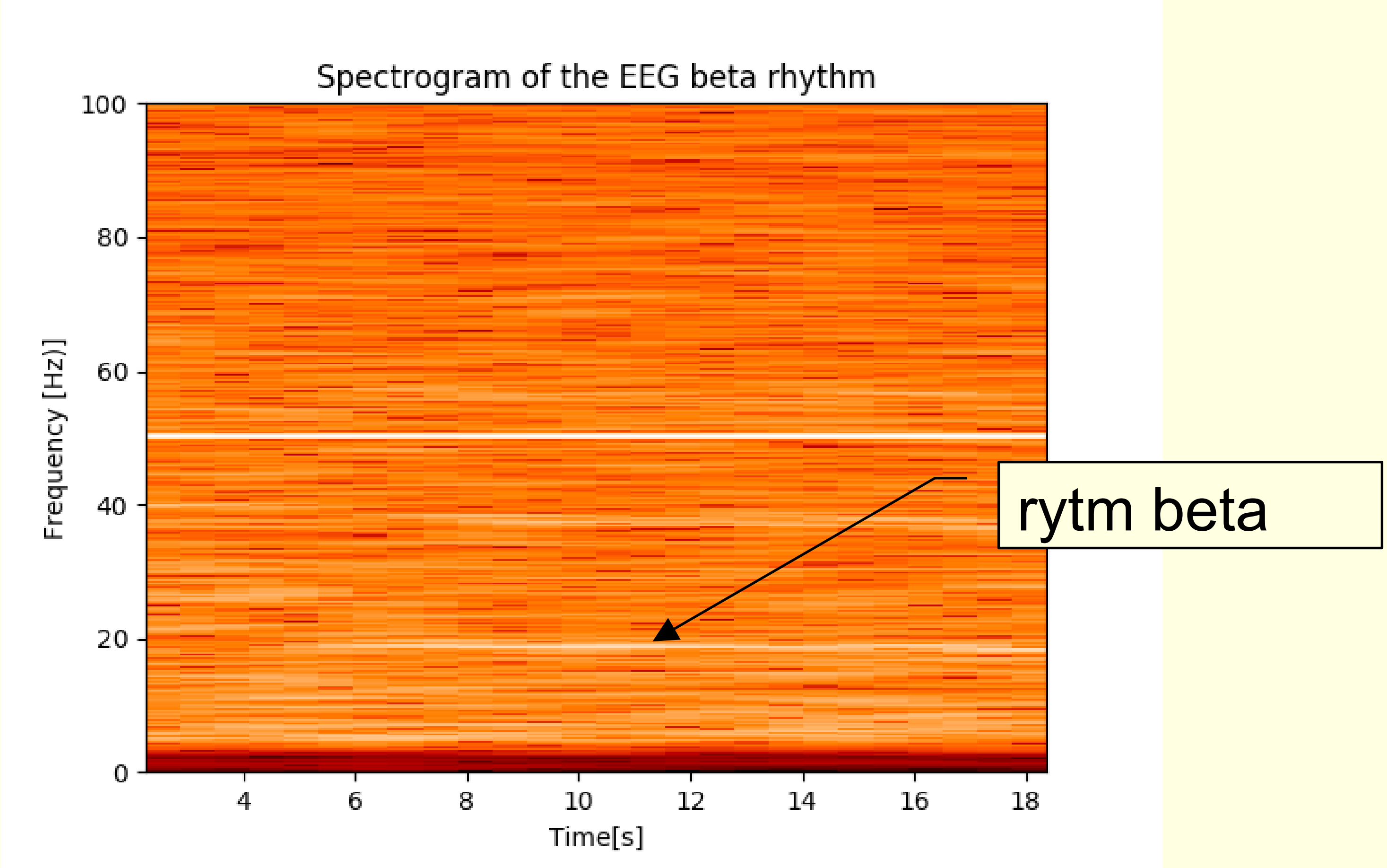


Pxx, freqs, bins, im = specgram(eeg1, NFFT=512, Fs=200, noverlap=500, cmap=cm.gist_heat)

Sygnał EEG



Krótkookresowa transformacja Fouriera



Pxx, freqs, bins, im = specgram(eeg2, NFFT=512, Fs=200, noverlap=500, cmap=cm.gist_heat)

Podsumowanie

1. Szereg Fouriera
2. Wykładniczy szereg Fouriera
3. Przekształcenie Fouriera
4. Dyskretne przekształcenie Fouriera
5. Interpretacja widma częstotliwości
6. Krótkookresowa transformata Fouriera