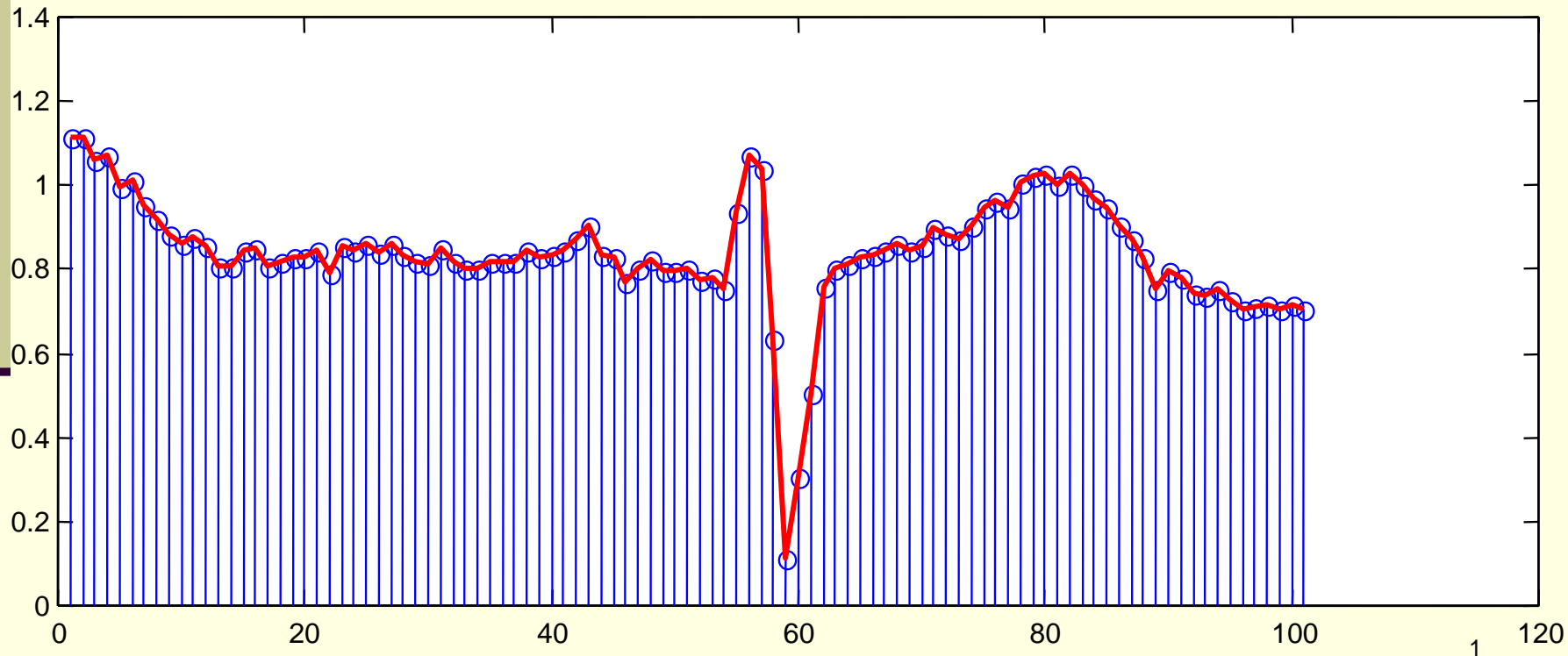


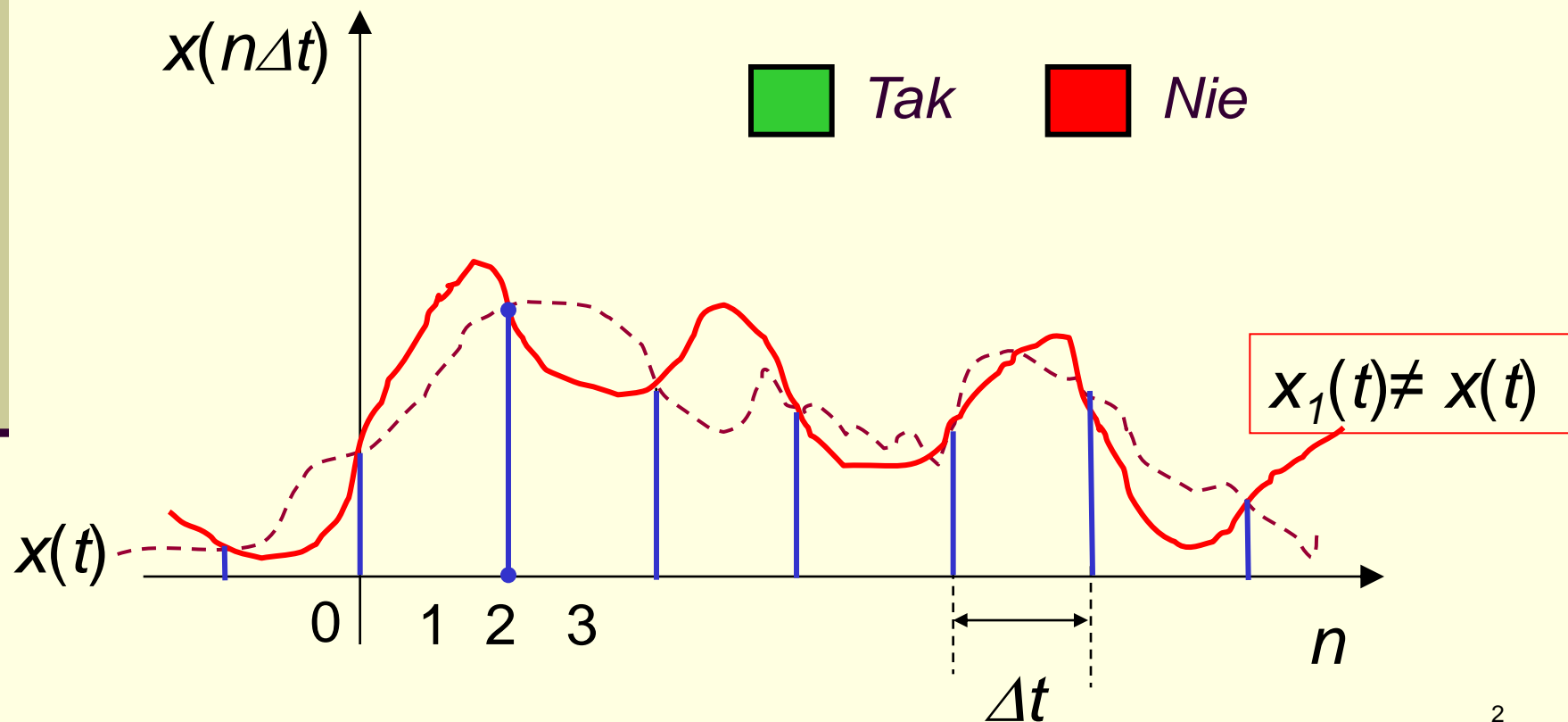
Próbkowanie sygnałów

Próbkowanie dziedziny czasu sygnałów stosuje się w cyfrowych (komputerowych) systemach przetwarzania i analizy sygnałów



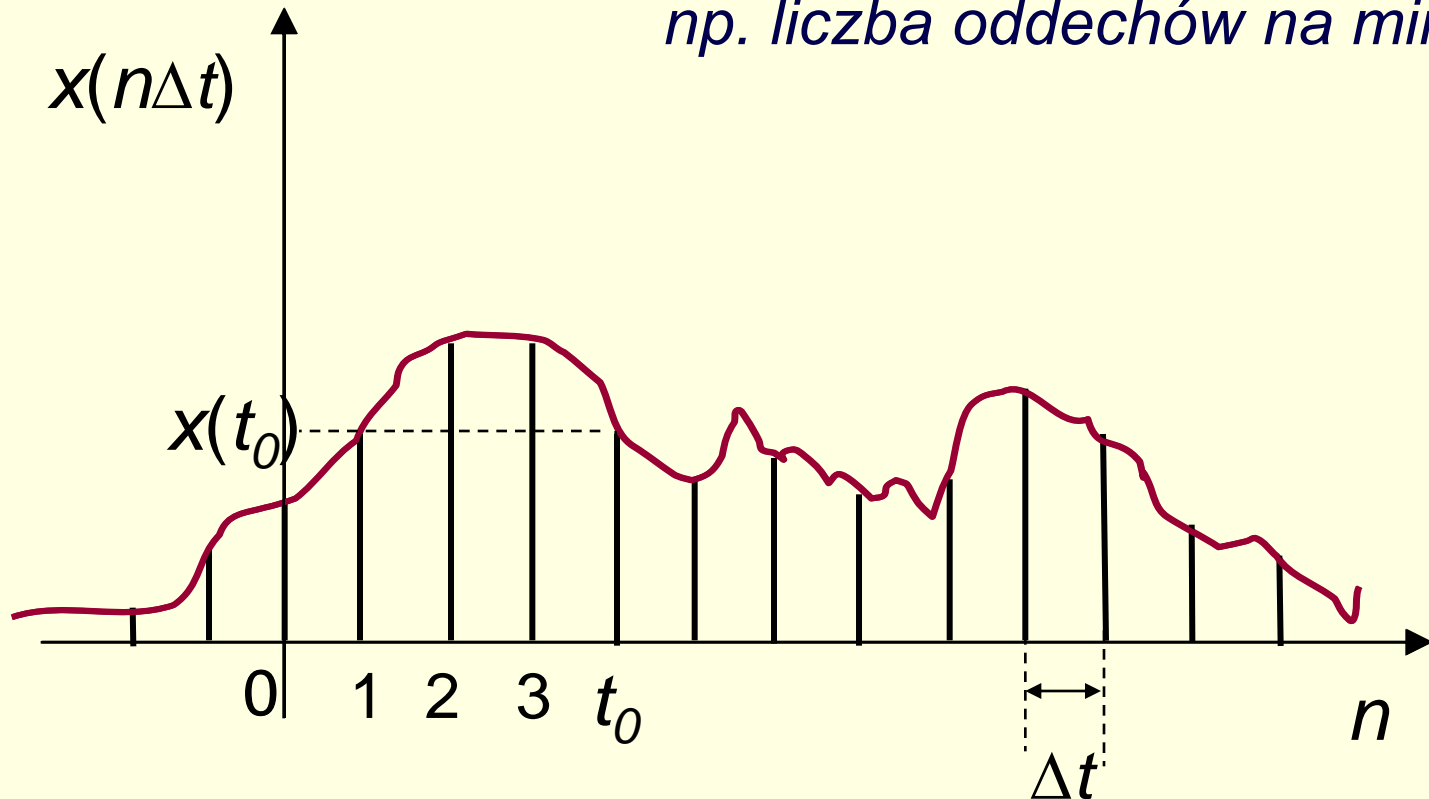
Jak często próbkować sygnał?

- Czy sygnał analogowy i dyskretny w czasie mogą być równoważne?



Próbkowanie sygnału

Sygnał dyskretny można uzyskać przez próbkowanie amplitudy sygnału ciągłego w dyskretnych chwilach czasu nT (nie zawsze sygnał jest uzyskiwany w postaci ciągłej, np. liczba oddechów na minutę)



Próbkowanie sygnału

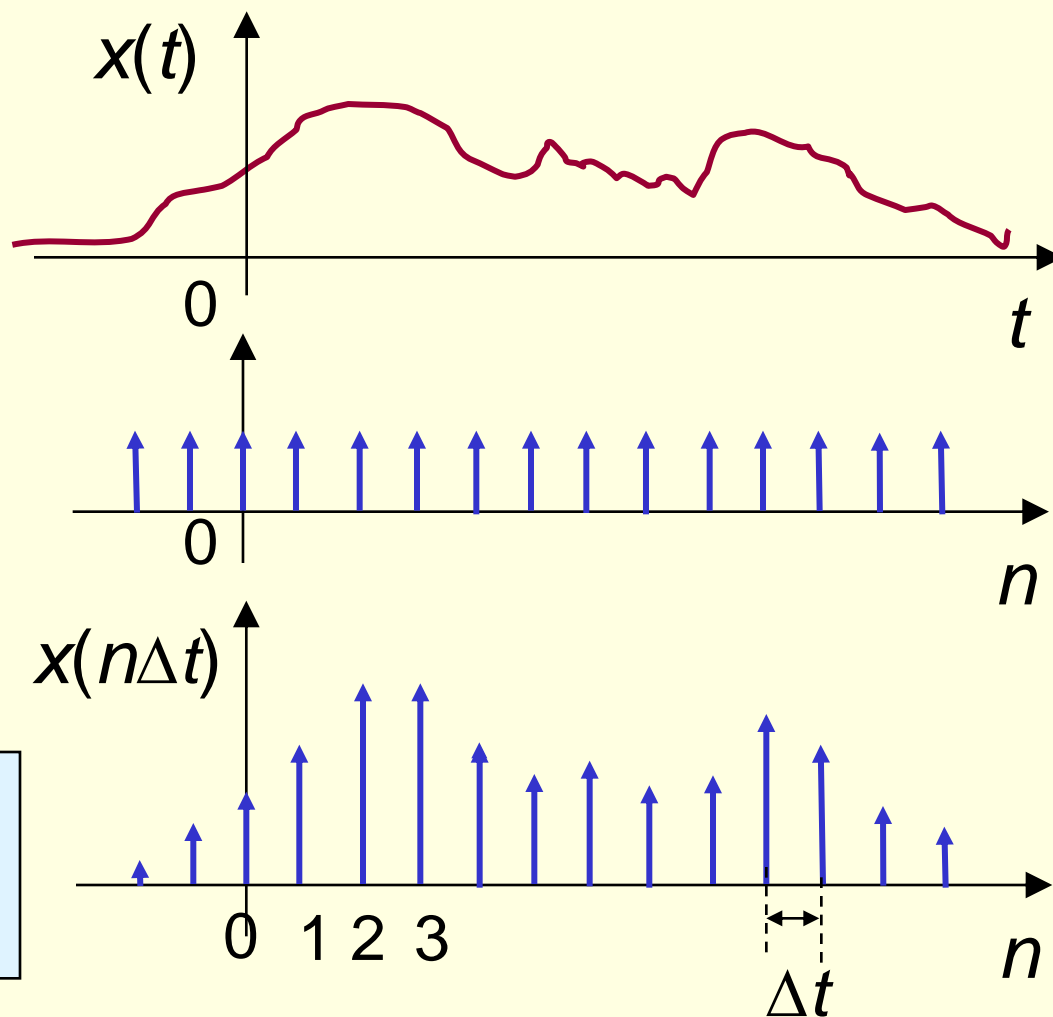
$$x(t)$$

×

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(n-k)$$

=

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(t) \delta(n-k)$$



Niektóre właściwości przekształcenia Fouriera

1. Liniowość: $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2. Zmiana skali: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$

3. Splot sygnałów: $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$

4. Iloczyn sygnałów: $x(t)y(t) \leftrightarrow X(j\omega) * Y(j\omega)$

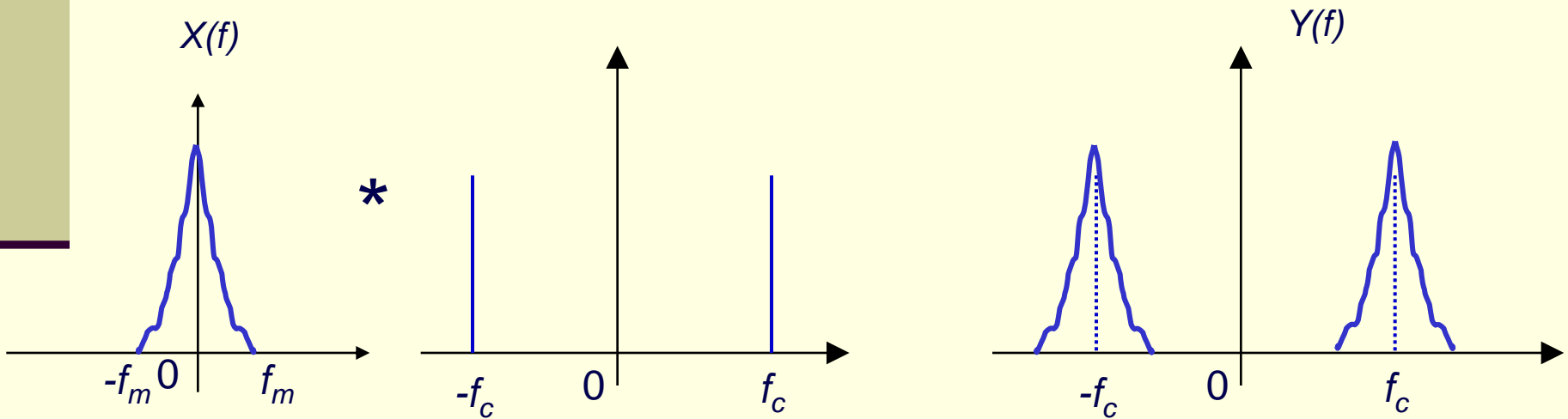
5. Równość Parsewala: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega =$

6. O modulacji: $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

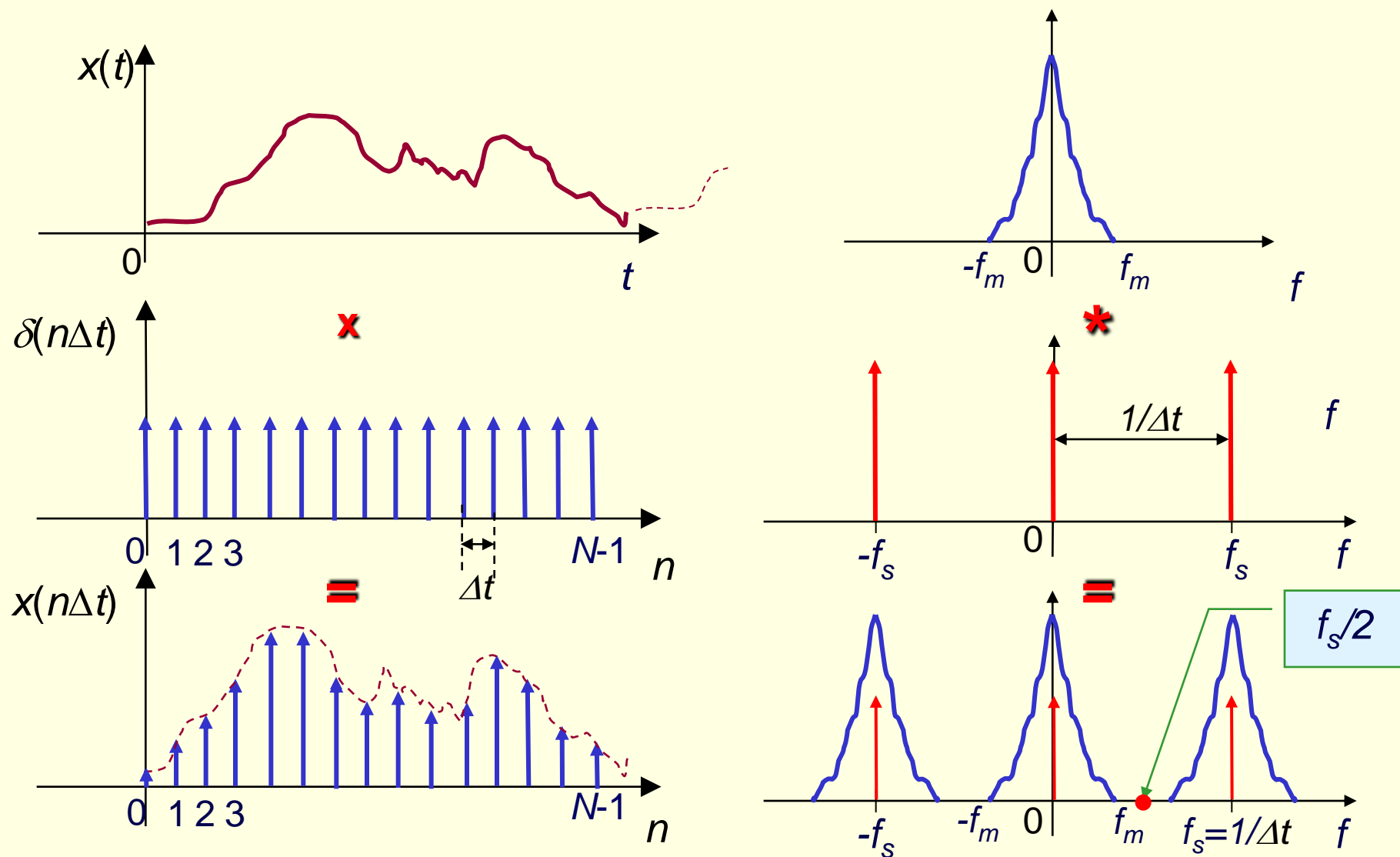
Modulacja sygnału

$$\mathfrak{I}(\cos 2\pi f_c t) = \mathfrak{I}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right)\right\} = \frac{1}{2}(2\pi\delta(f - f_c) + 2\pi\delta(f + f_c))$$

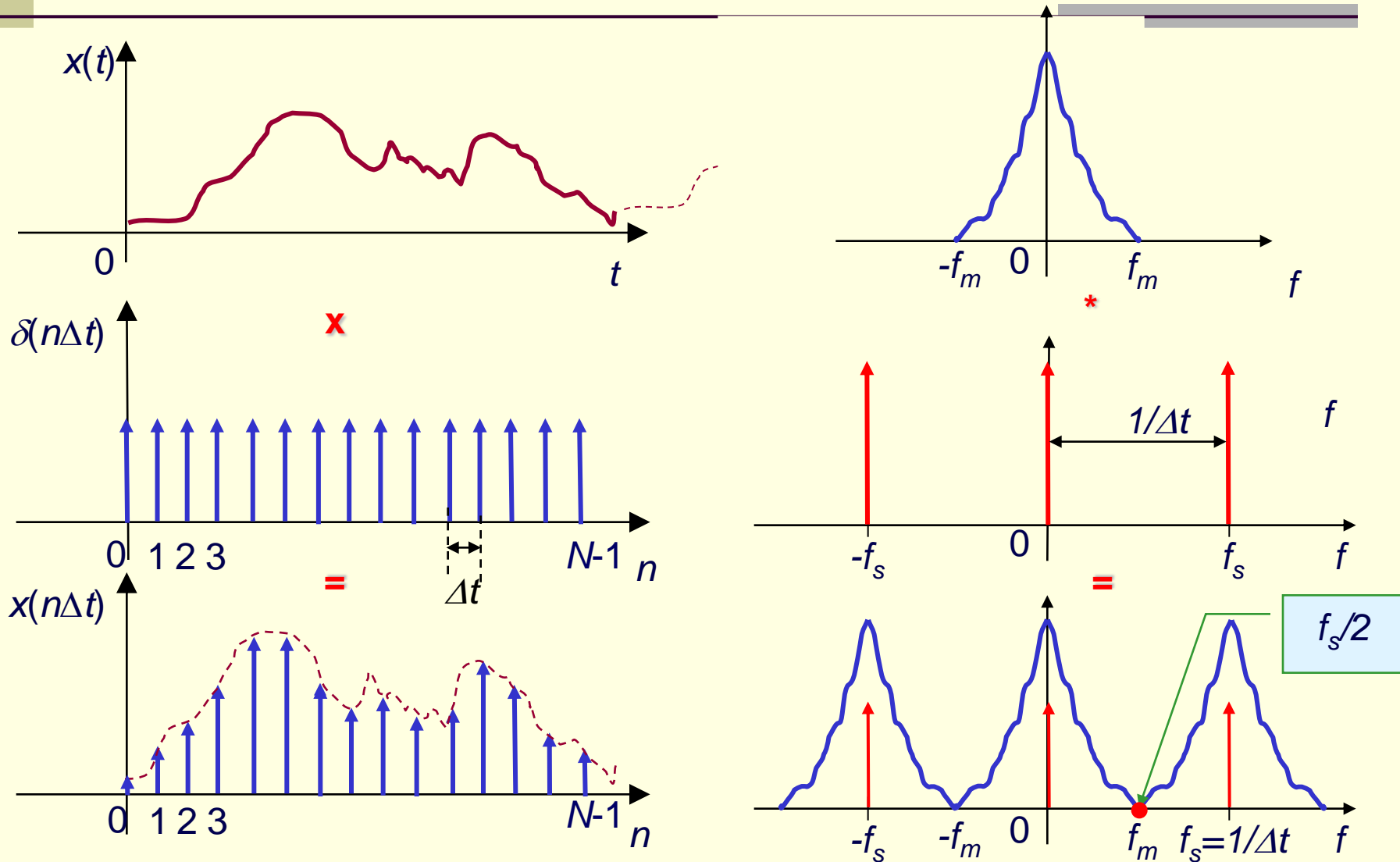
$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow Y(f) = X(f - f_c)$$



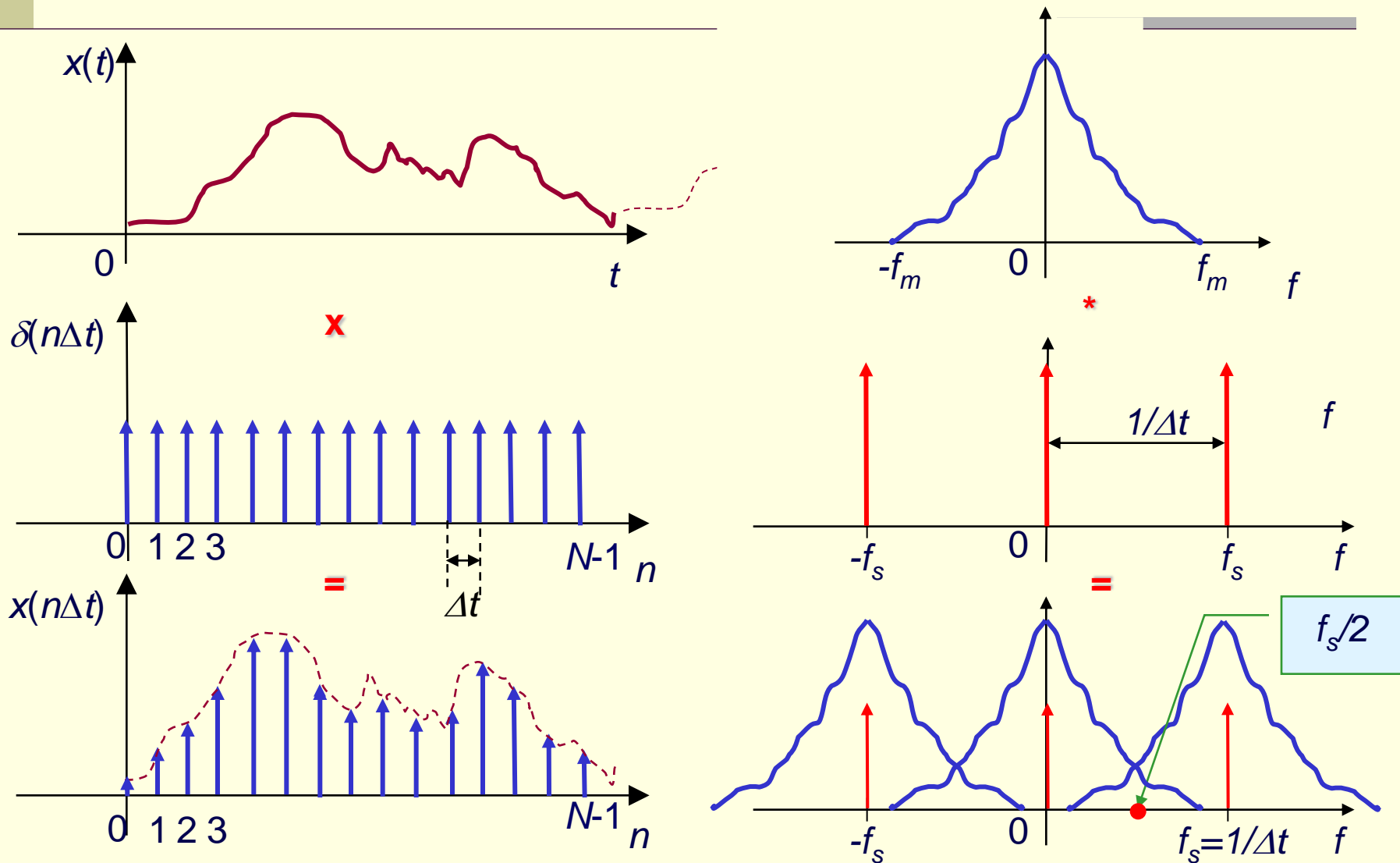
Powielenie okresowe sygnału ($f_m < f_s/2$)



Powielenie okresowe sygnału ($f_m = f_s/2$)

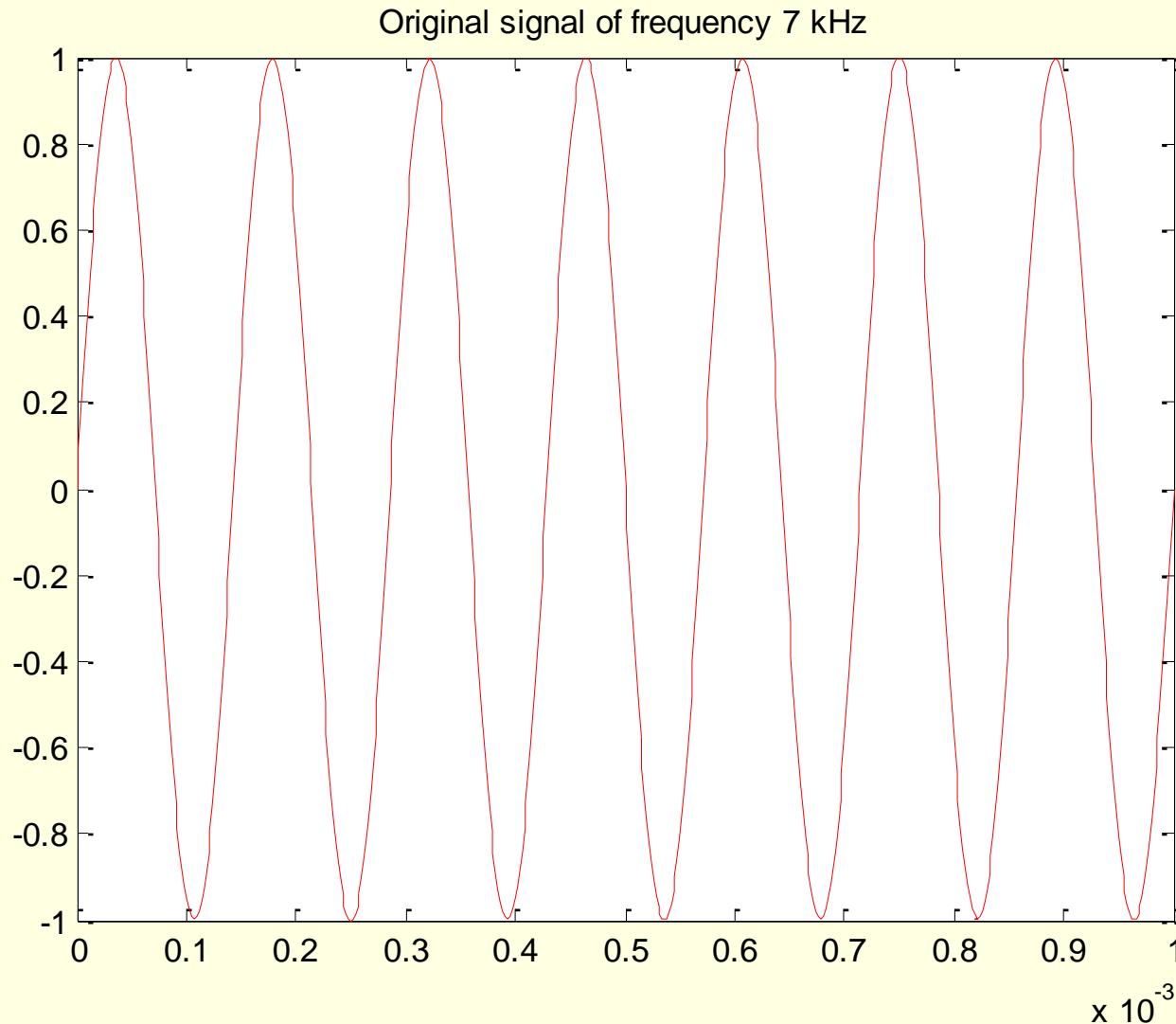


Powielenie okresowe sygnału ($f_m > f_s/2$)



Utożsamianie częstotliwości (ang. aliasing)

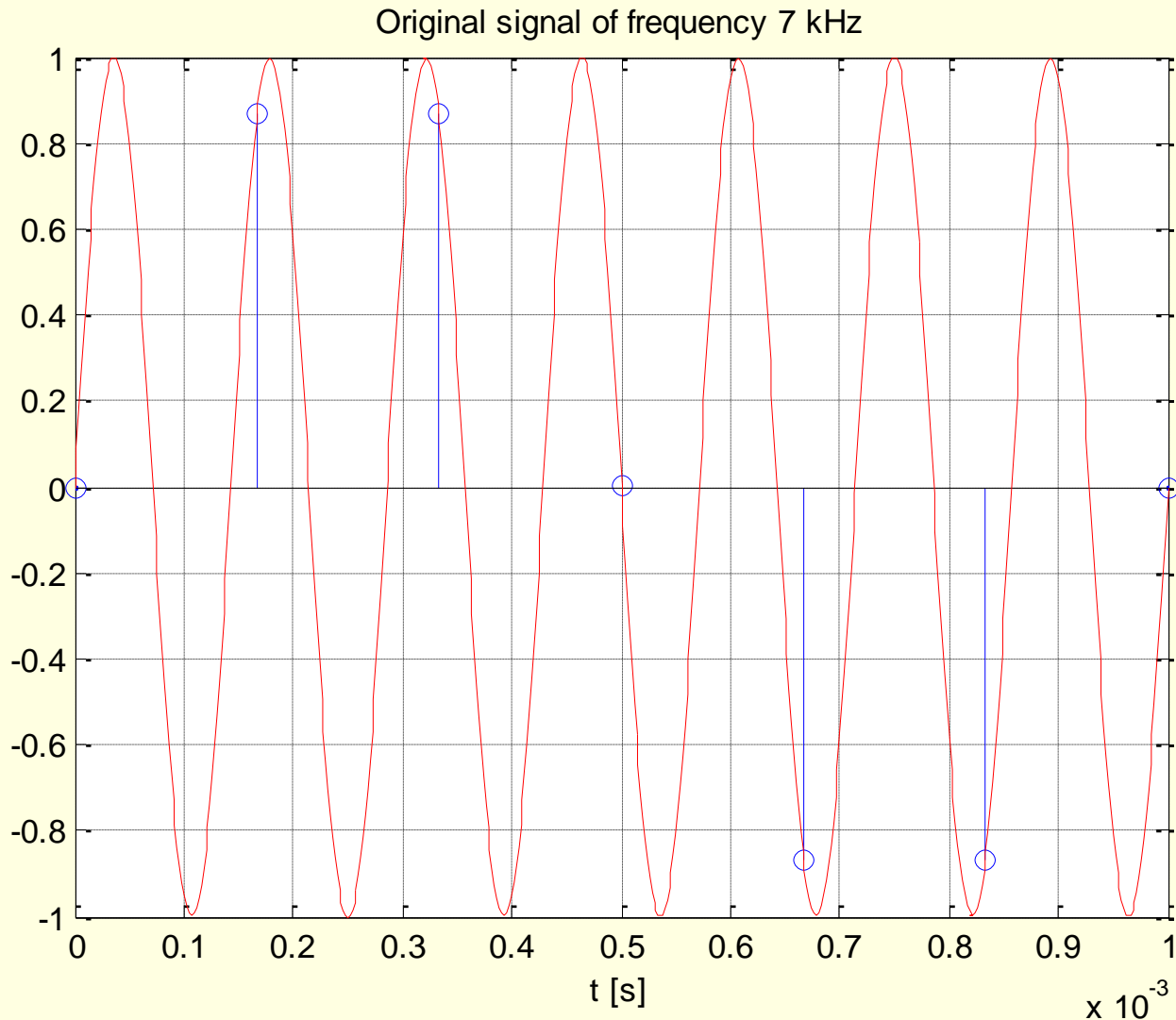
$f_x = 7\text{kHz}$



Utożsamianie częstotliwości (ang. aliasing)

$f_x = 7\text{kHz}$

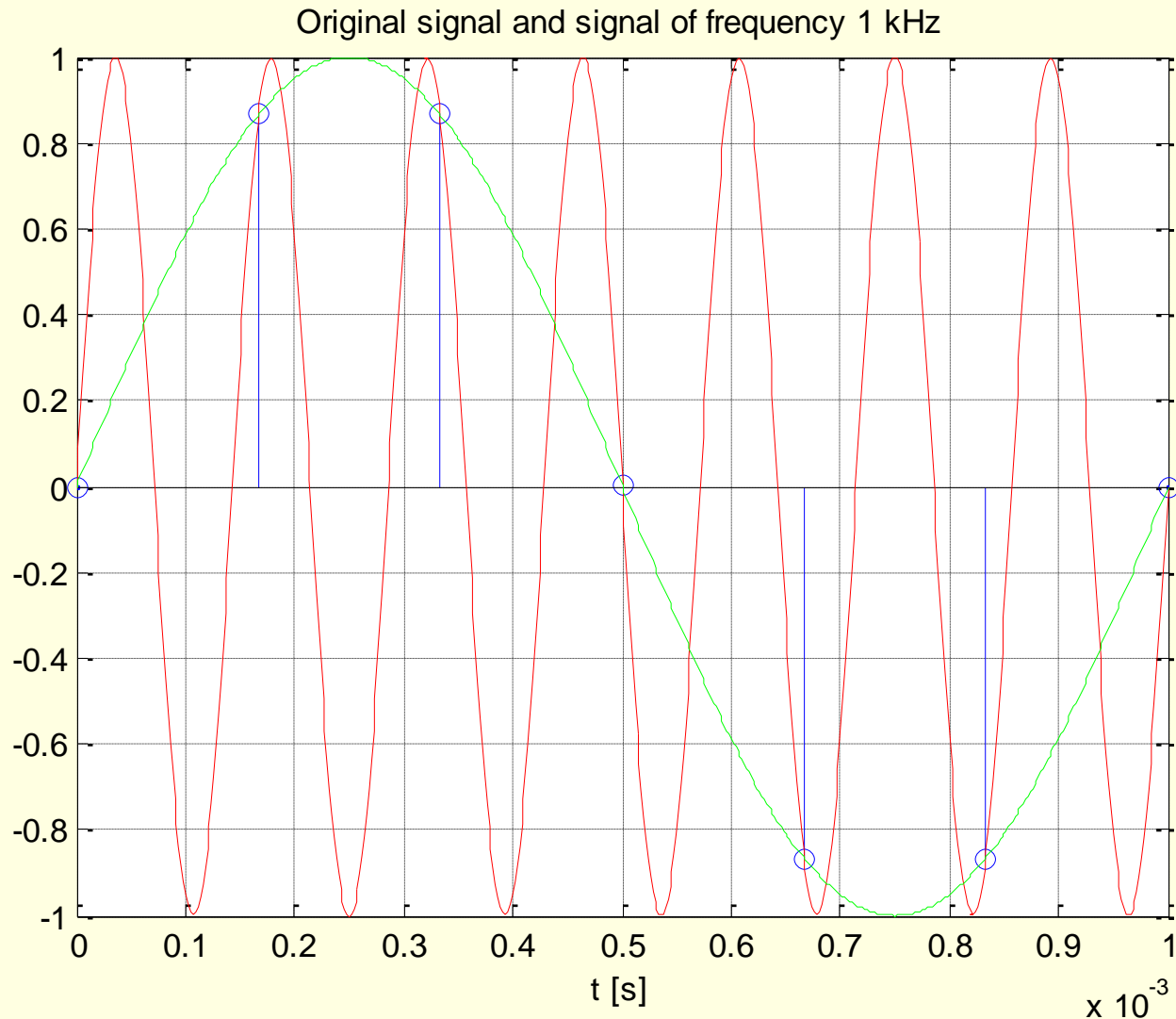
$f_s = 6\text{kHz}$



Utożsamianie częstotliwości (ang. aliasing)

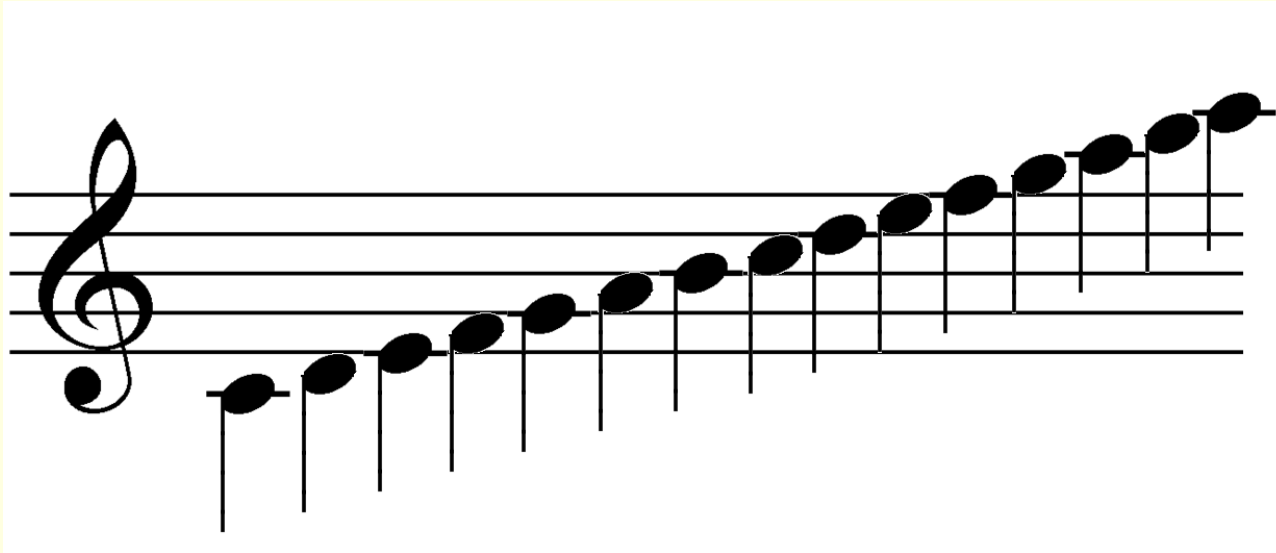
$f_x = 7\text{kHz}$

$f_s = 6\text{kHz}$



Utożsamianie częstotliwości (ang. aliasing)

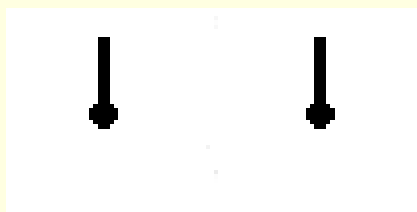
Pokaz:



- Gama C-dur zawiera maksymalną częstotliwość tonu $f=987$ Hz
- Słuchamy gamy C-dur kolejno dla częstotliwości próbkowania: $f_s=5000\text{Hz}$, 2000Hz i 1000Hz

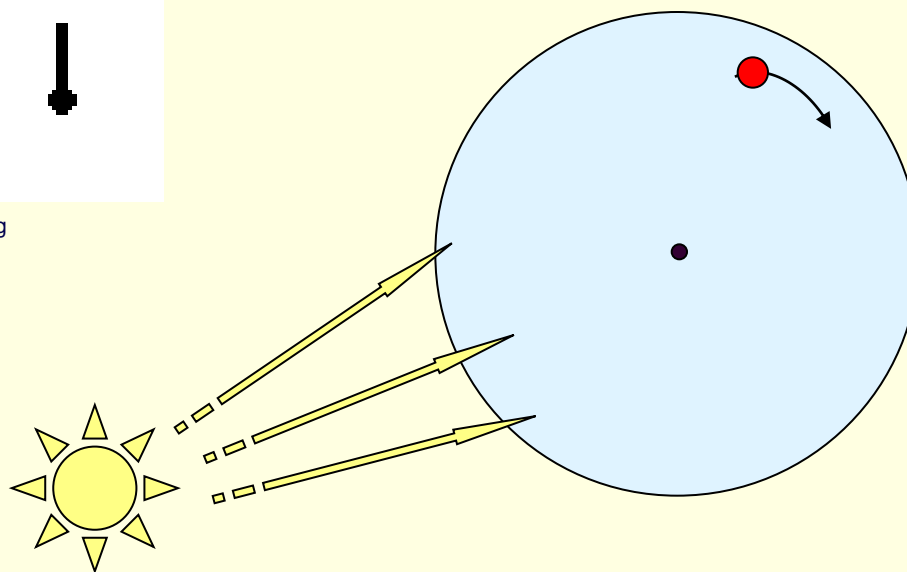
Efekt stroboskopowy

Aby prawidłowo rozpoznać prędkość obrotową tarczy należy oświetlać ją światłem stroboskopu co najmniej dwa razy w okresie obrotu tarczy



wikipedia.org

Lampa błyskowa



Efekt „nieruchomych śmigieł” helikoptera: www.youtube.com/watch?v=R-IVw8OKjvQ

Twierdzenie o próbkowaniu

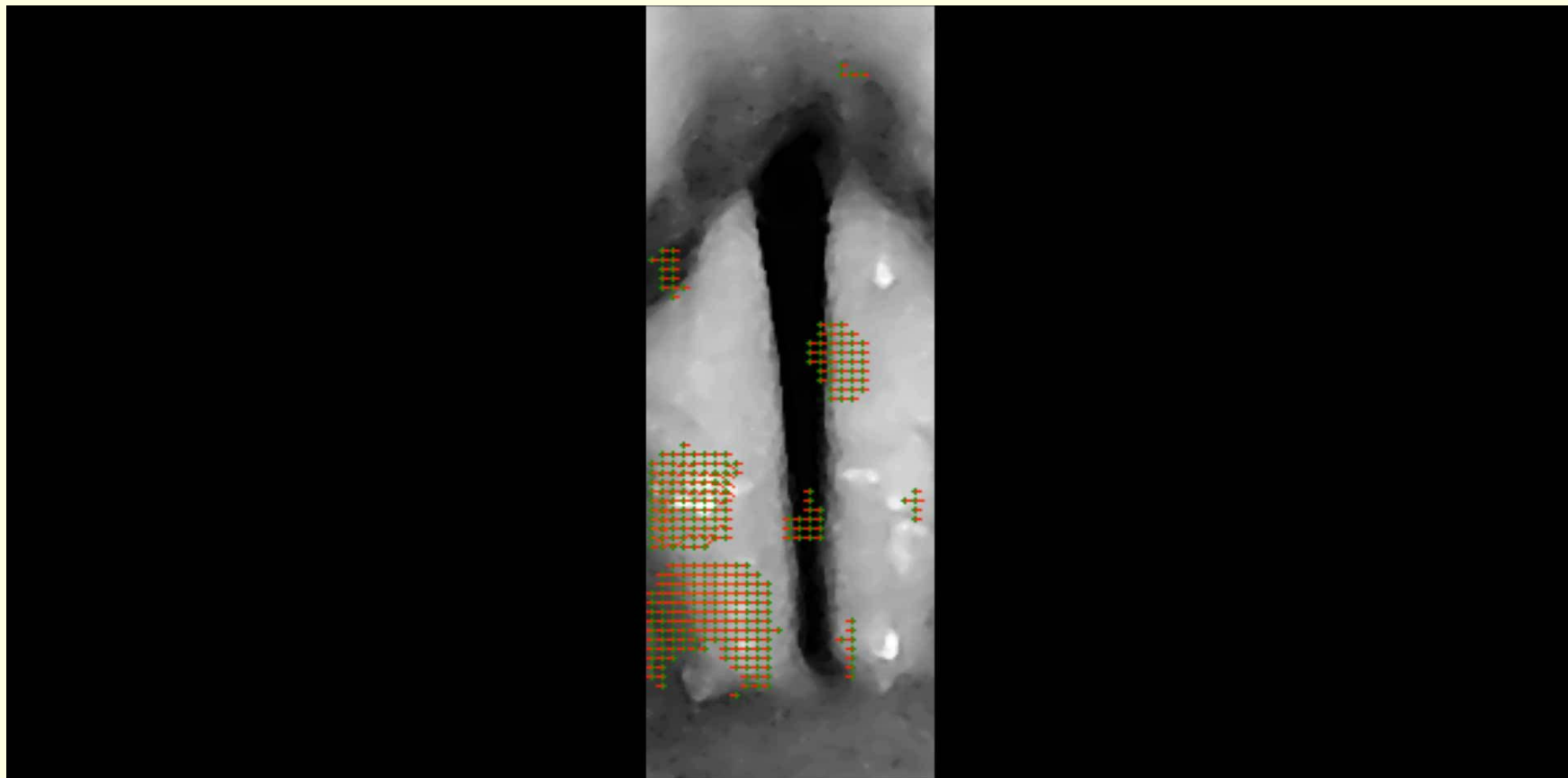
! Sygnał analogowy $x(t)$, którego widmo $X(f)=0$ dla $|f|>f_m$ może być jednoznacznie odtworzony na podstawie jego próbek jeżeli częstotliwość próbkowania f_s spełnia warunek:

$$f_s > 2f_m$$

częstotliwość
Nyquista

np. w systemie GSM system $f_s=8\text{kHz}$

Zastosowanie efektu stroboskopowego



Obrazowanie drgających fałdów głosowych: Stroboskop błyska z częstotliwością: $f_s = f_{fald} - 1\text{Hz}$, gdzie $f_{fald} \cong 200\text{Hz}$ jest częstotliwością drgania fałdów

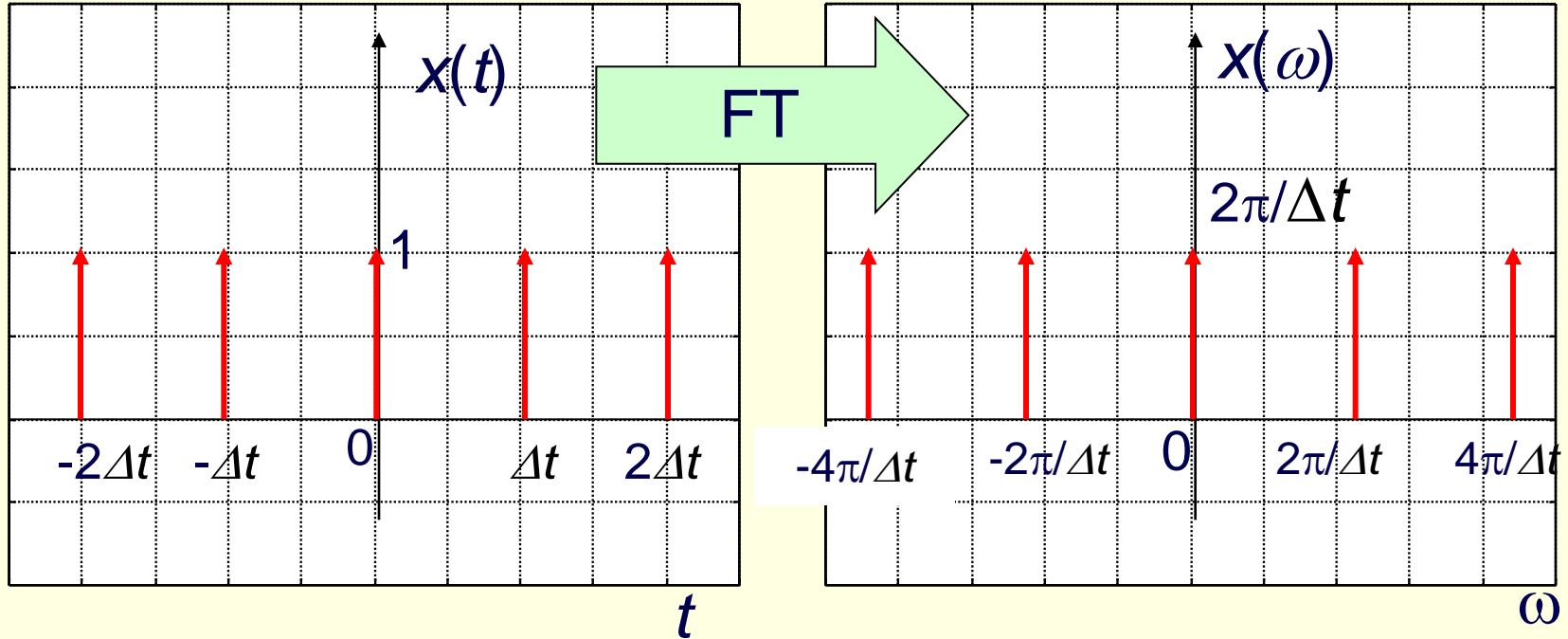
Twierdzenie o próbkowaniu

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(t) \delta(t - n\Delta t)$$

Korzystając z własności przekształcenia Fouriera o iloczynie sygnałów, widmo sygnału $x_p(t)$ można wyrazić jako splot widma sygnału i widma funkcji próbkującej:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * \Pi(j\omega)]$$

Szereg impulsów Diraca



$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad \leftrightarrow \quad \text{II}(j\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

gdzie $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$

Twierdzenie o próbkowaniu

$$\Pi(j\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Z własności przekształcenia Fouriera o iloczynie sygnałów:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Gdyż splot widma sygnału z impulsem Diraca przemieszcza widmo sygnału w położenie tego impulsu:

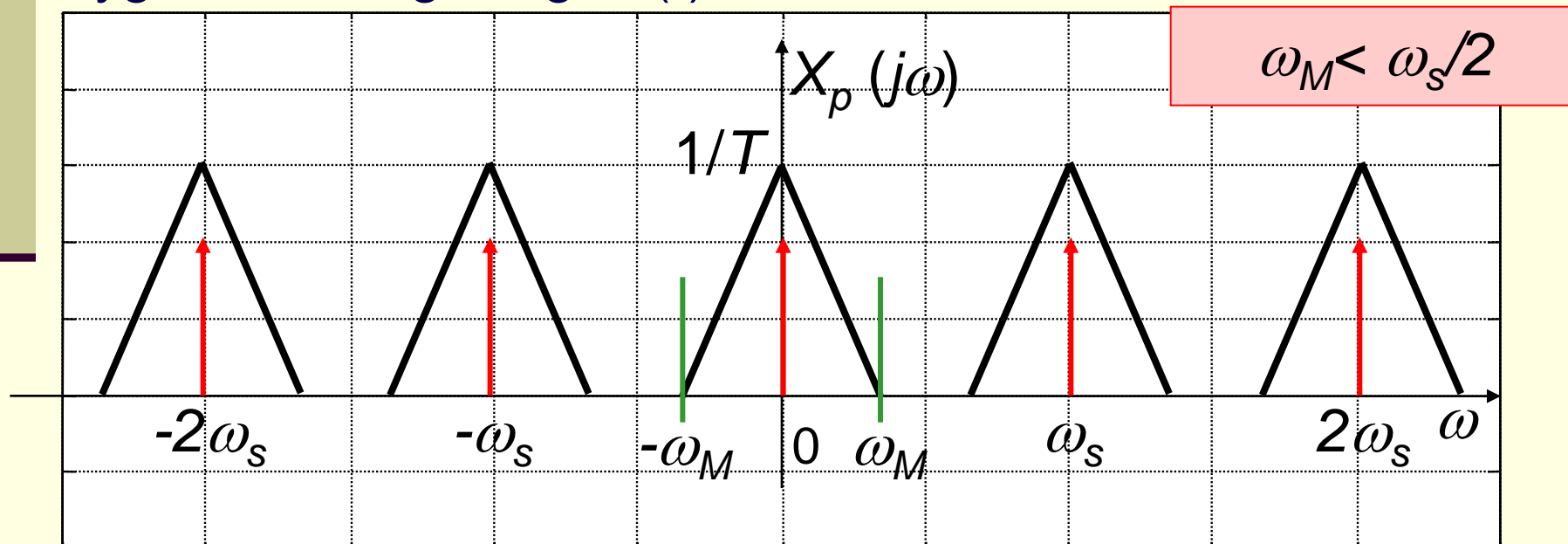
$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$$

Twierdzenie o próbkowaniu

Wyrażenie:

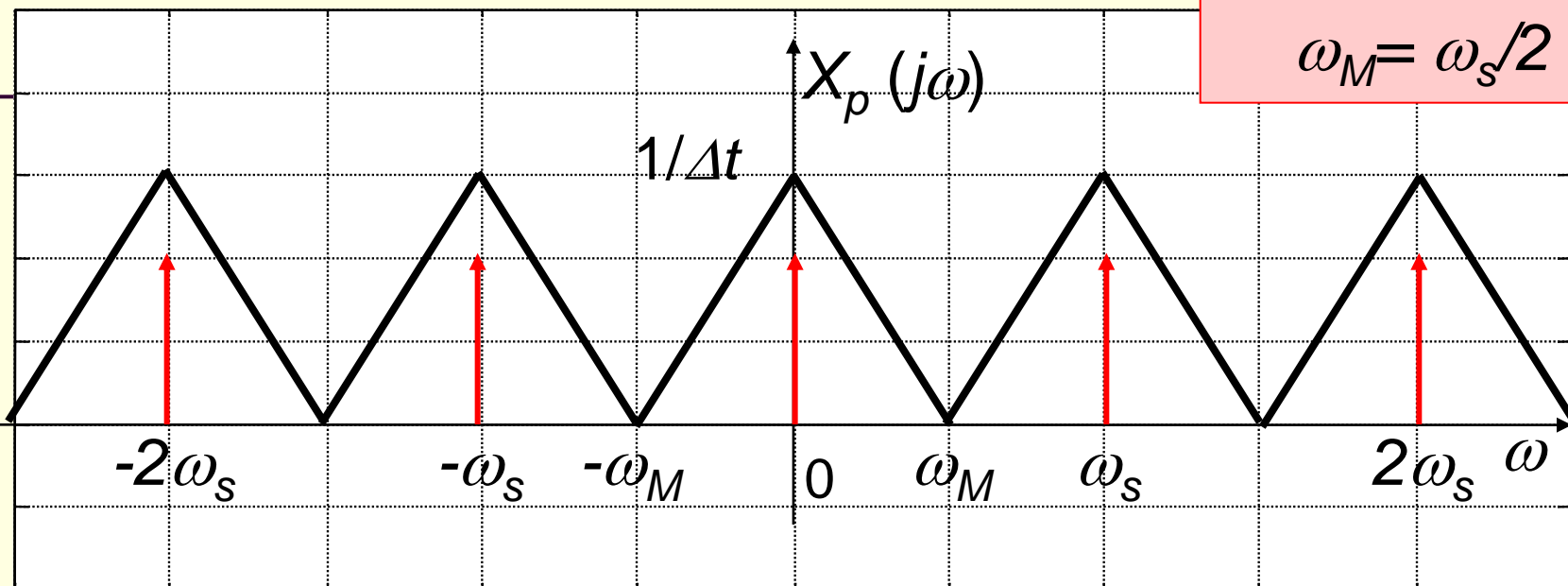
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

odpowiada tzw. **powieleniu okresowemu** widma $X(j\omega)$ sygnału analogowego $x(t)$.



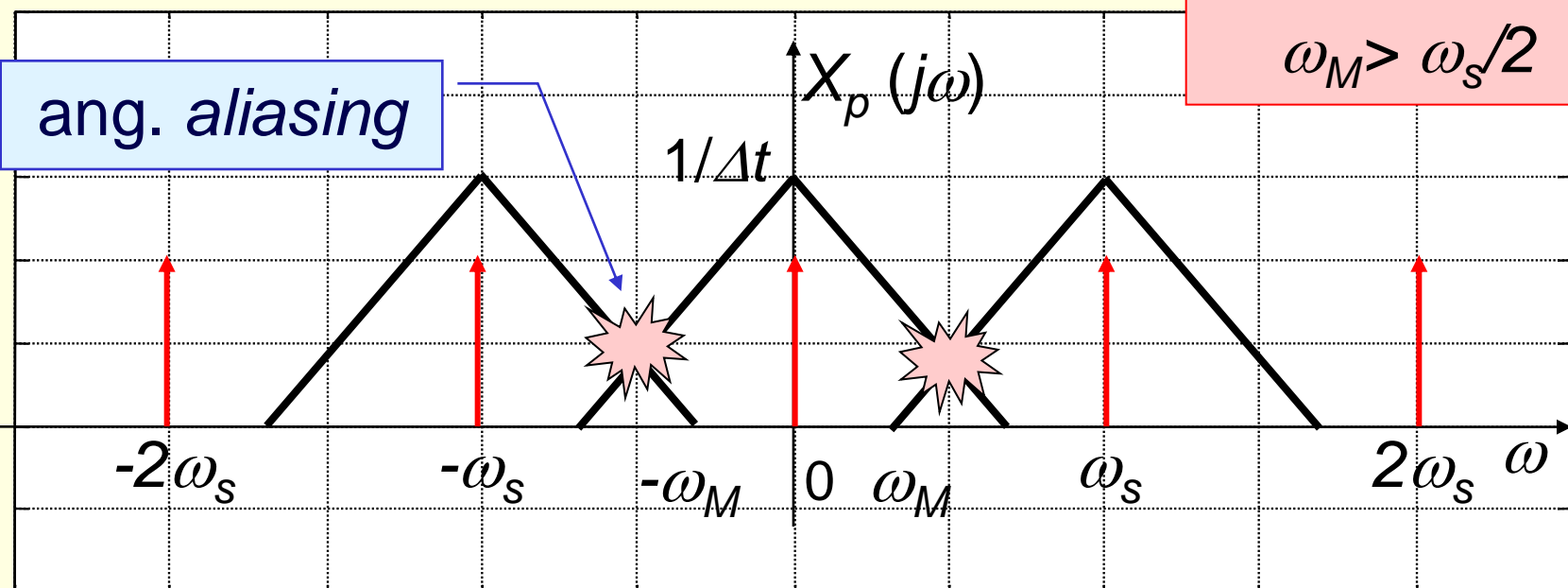
Twierdzenie o próbkowaniu

$$\omega_M = \omega_s / 2$$

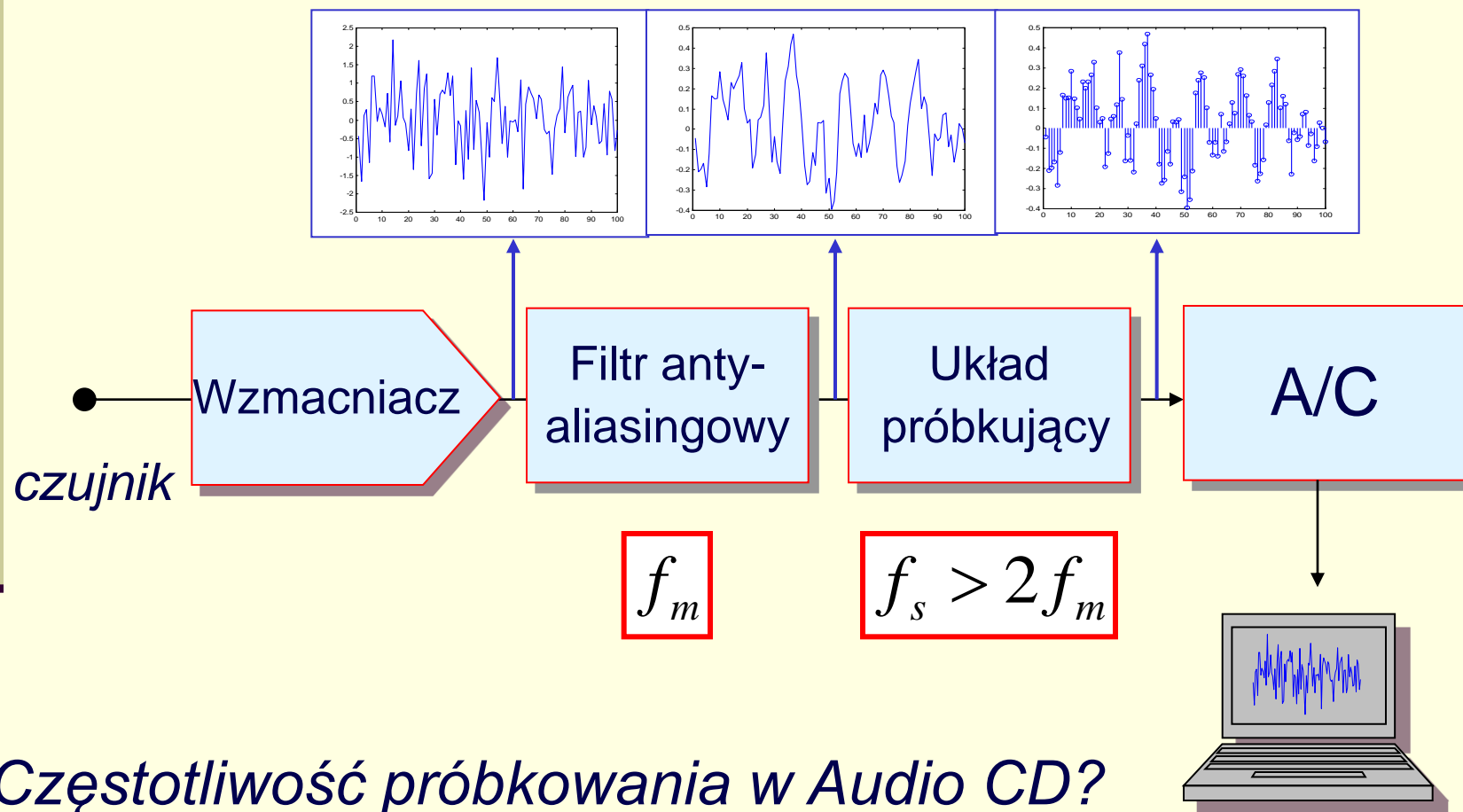


$$\omega_M > \omega_s / 2$$

ang. aliasing

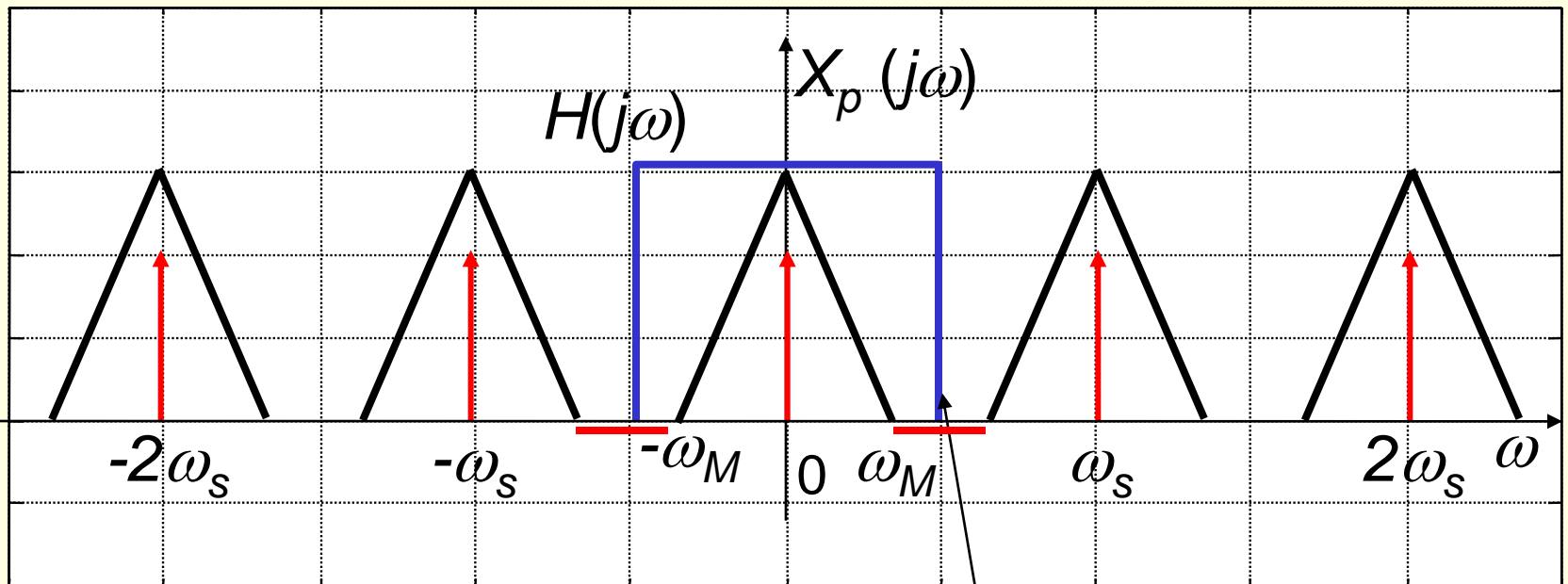


Układ akwizycji sygnału



Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Wydzielenie widma sygnału jest możliwe przez zastosowanie idealnego filtra dolnoprzepustowego $H(j\omega)$

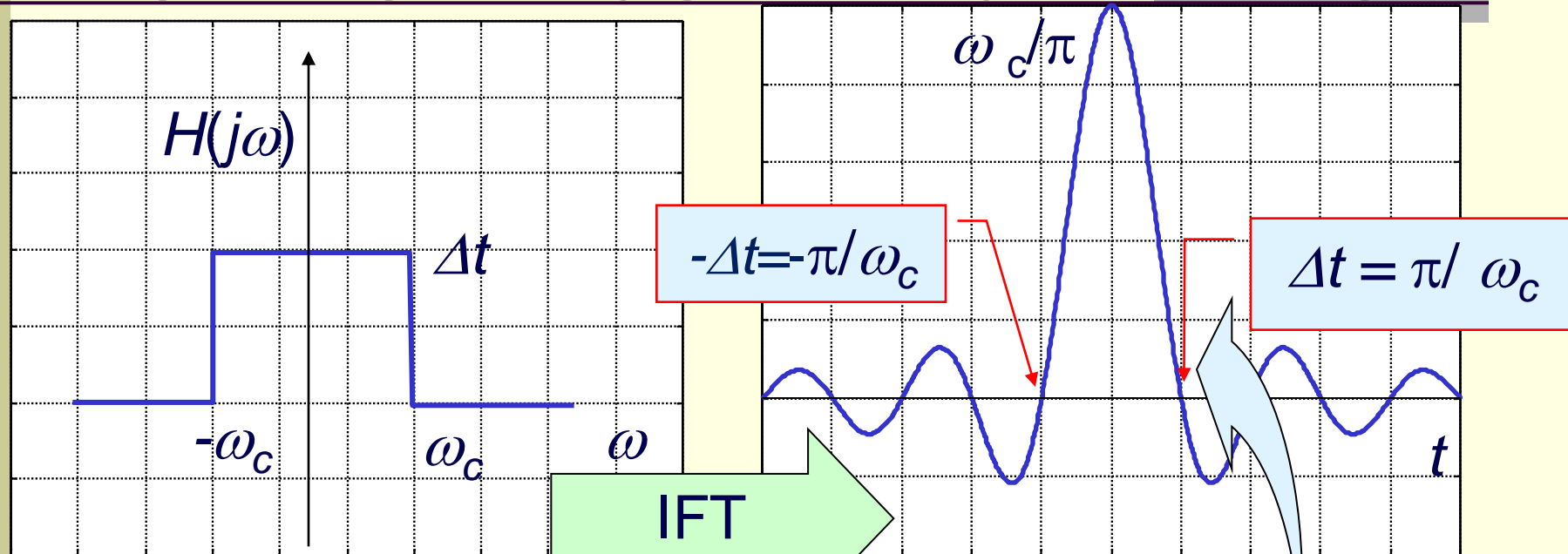


Najbezpieczniej zastosować:

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$$

$$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego



$$H(j\omega) = \begin{cases} \Delta t, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \Delta t \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

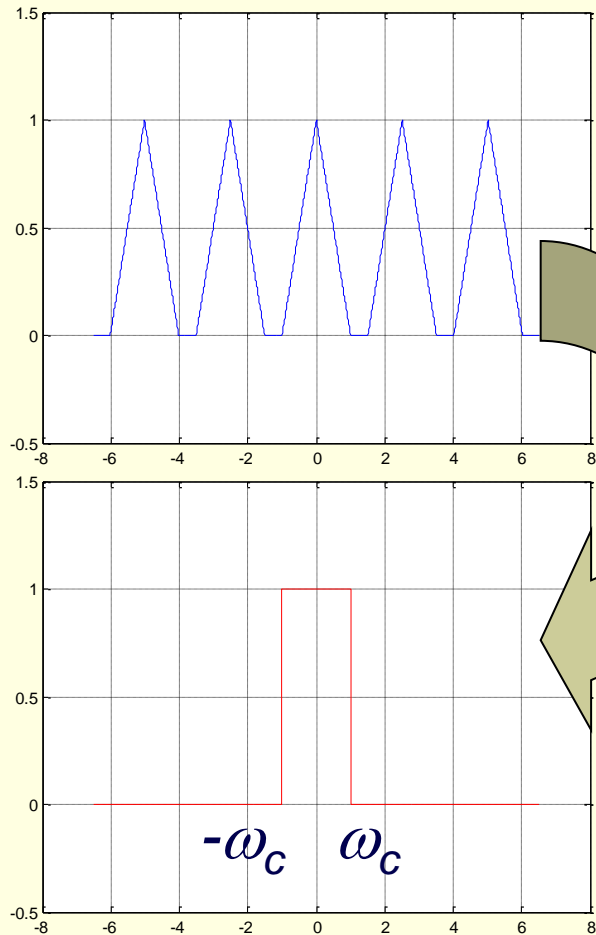
For:

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$$

$$\frac{\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi\Delta t}{2\pi} = \Delta t$$

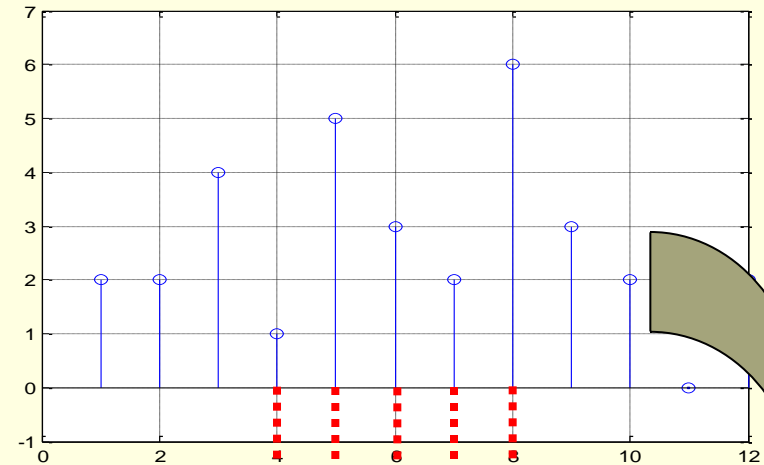
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Widmo

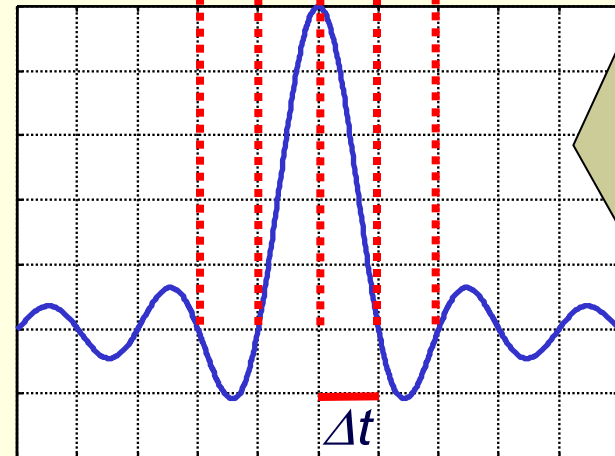


Mnożenie

Czas



Spłot



Niektóre właściwości przekształcenia Fouriera

1. Liniowość: $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2. Zmiana skali: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$

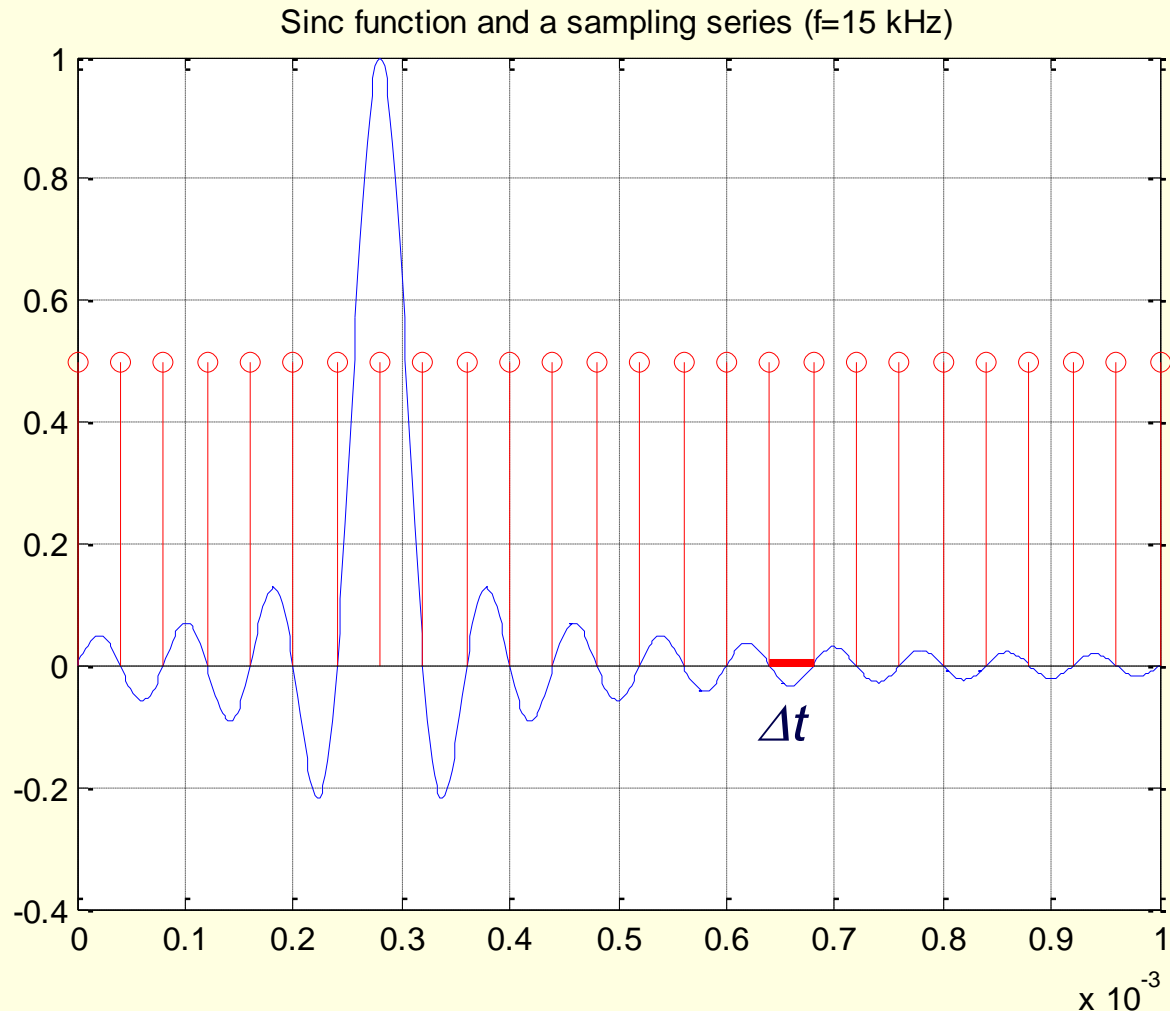
3. Splot sygnałów: $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$

4. Iloczyn sygnałów: $x(t)y(t) \leftrightarrow X(j\omega) * Y(j\omega)$

5. Równość Parsevala: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega =$

6. O modulacji: $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

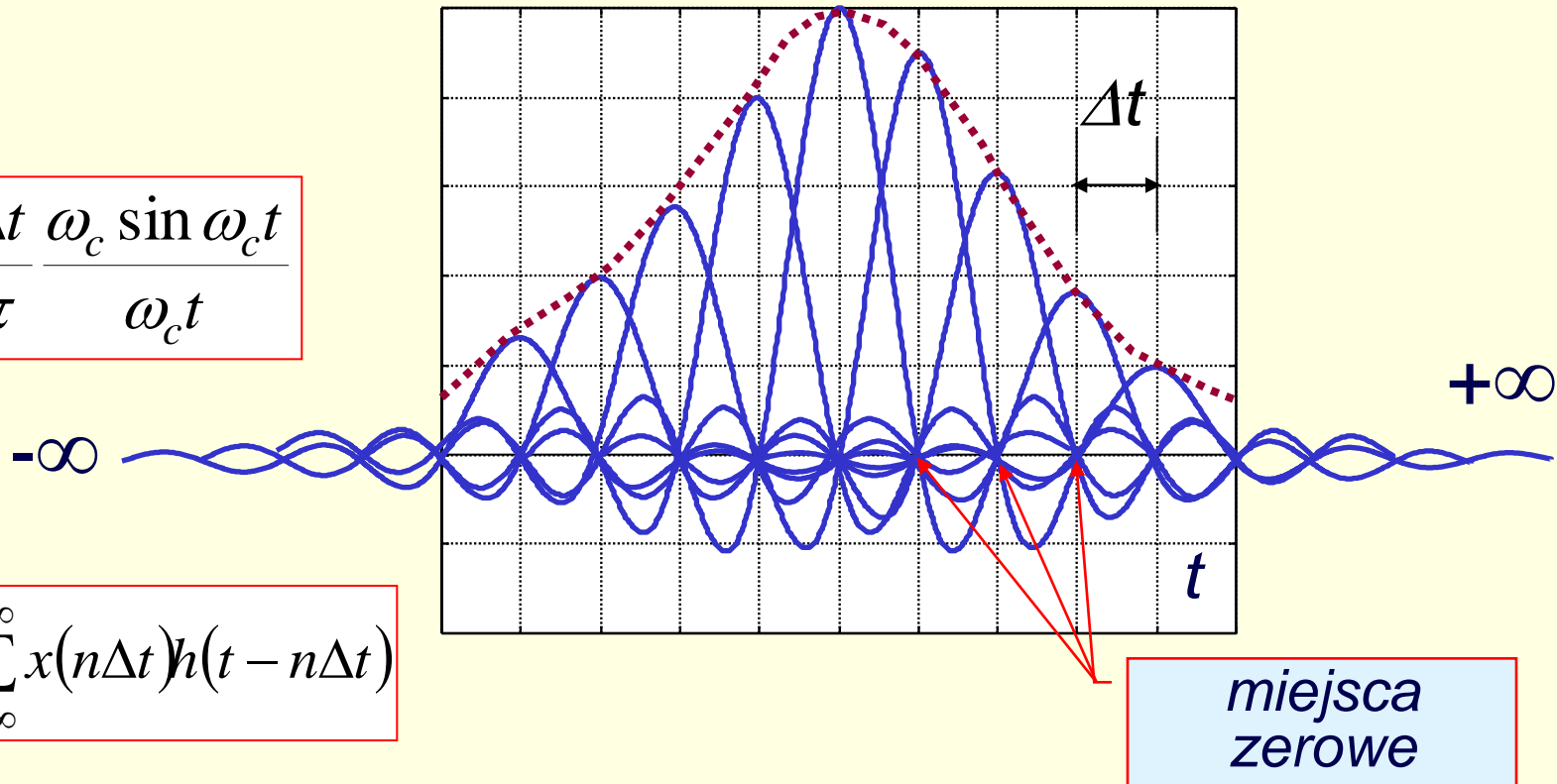
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego



Szereg interpolacyjny 'sinc'

$$h(t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{\omega_c \sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) h(t - n\Delta t)$$



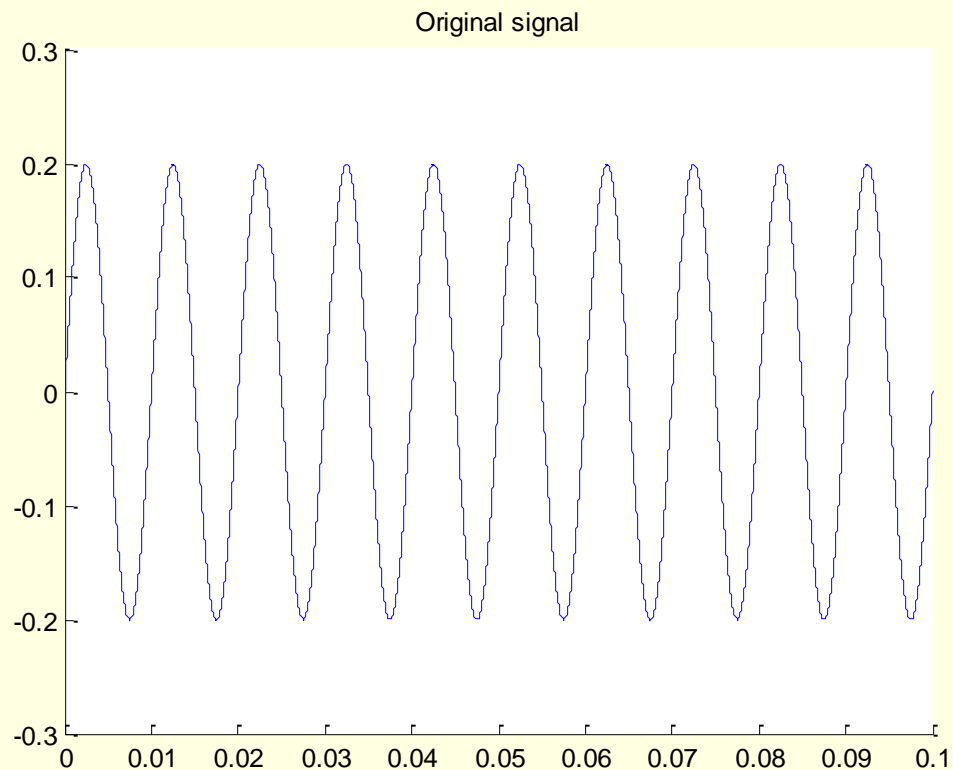
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \frac{\omega_c \Delta t}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - n\Delta t))}{\omega_c(t - n\Delta t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \text{sinc}(\omega_c(t - n\Delta t))$$

Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$



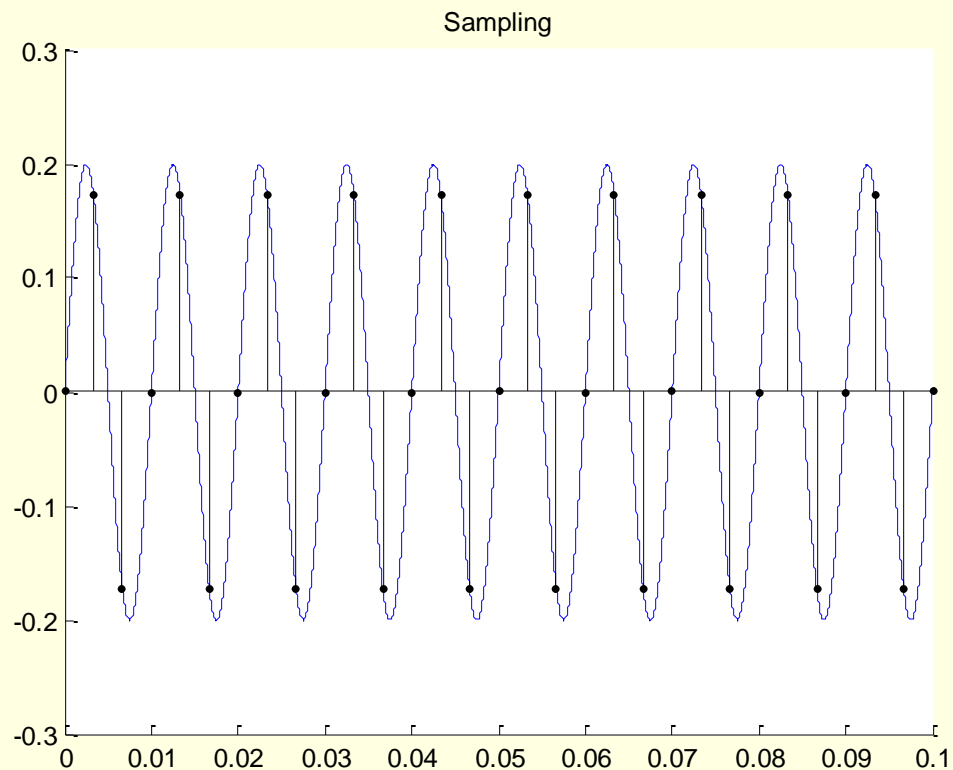
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



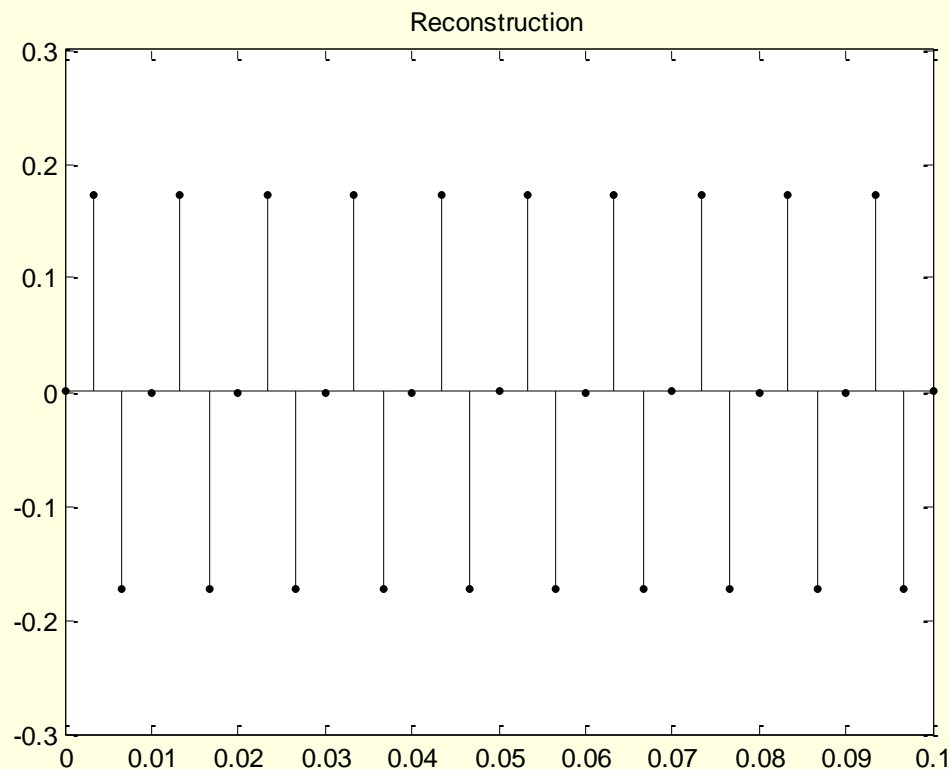
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



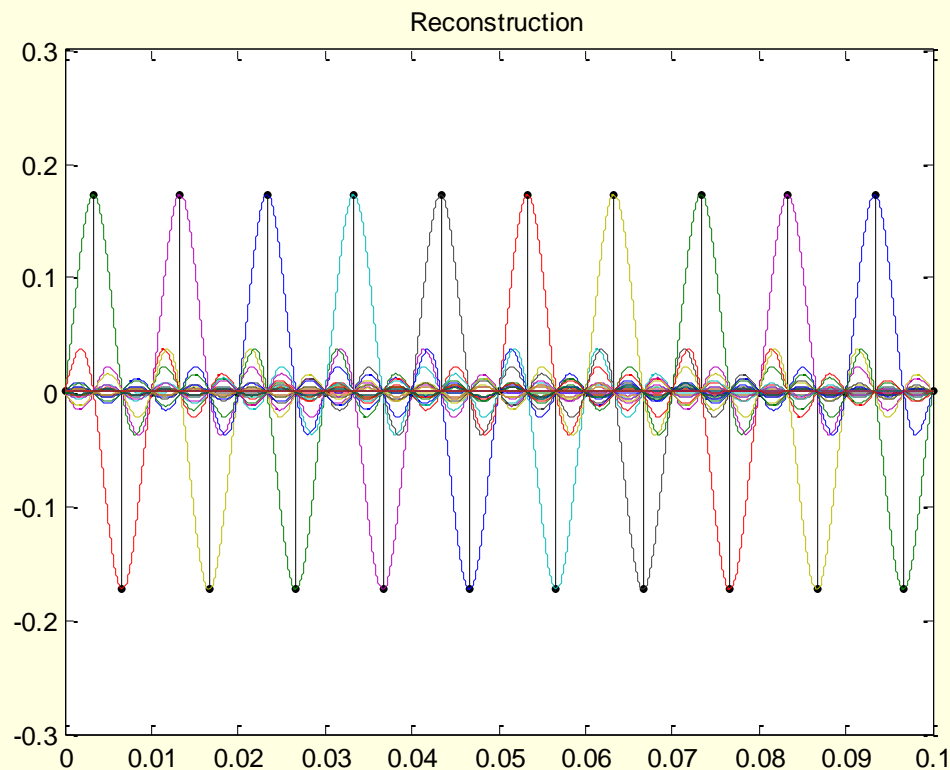
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



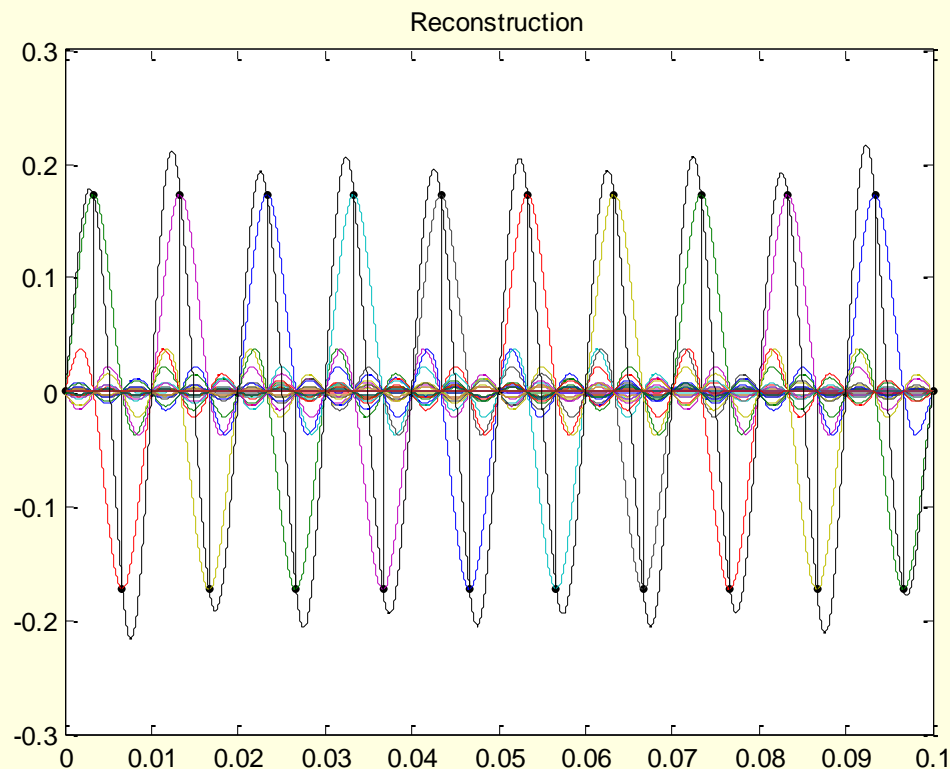
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



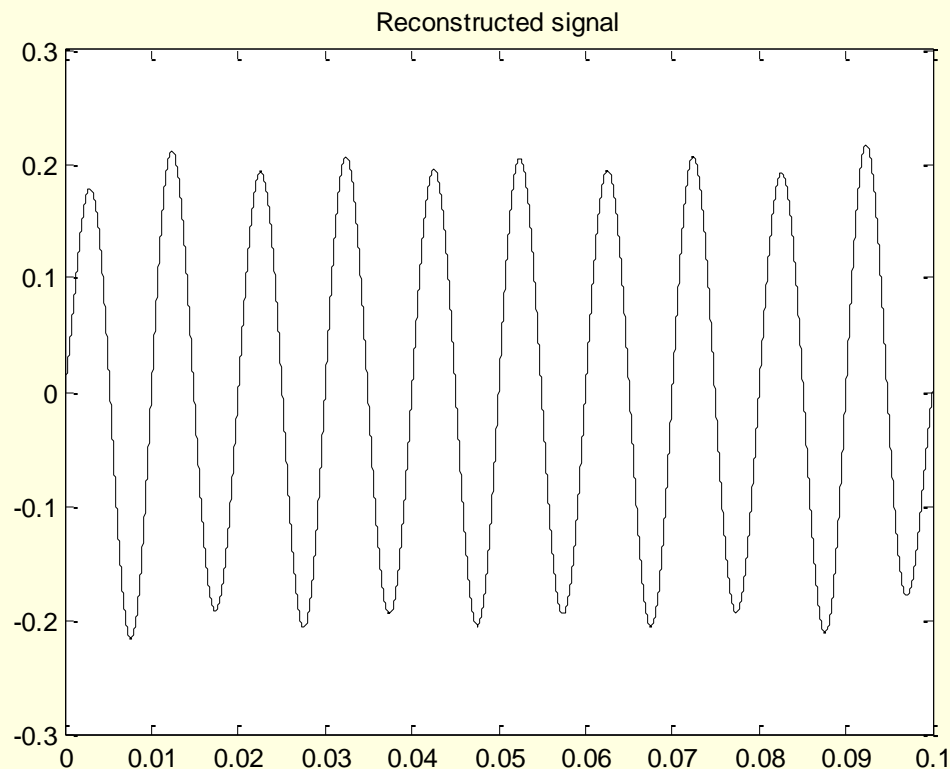
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



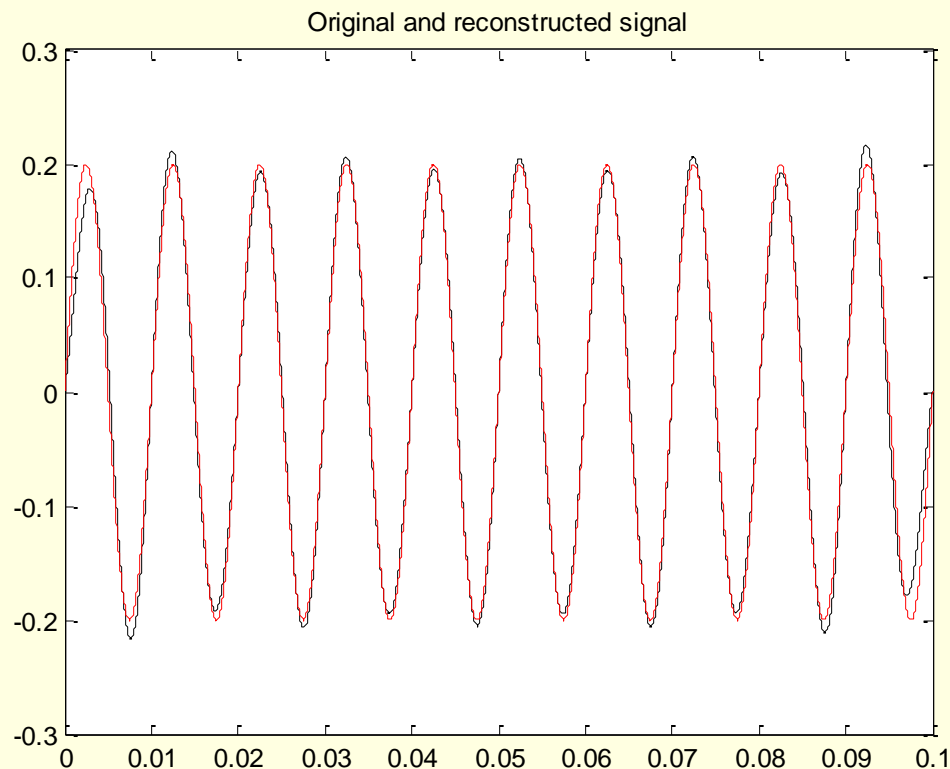
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=300\text{Hz}$$



Sygnał oryginalny i zrekonstruowany.

Widoczne efekty brzegowe

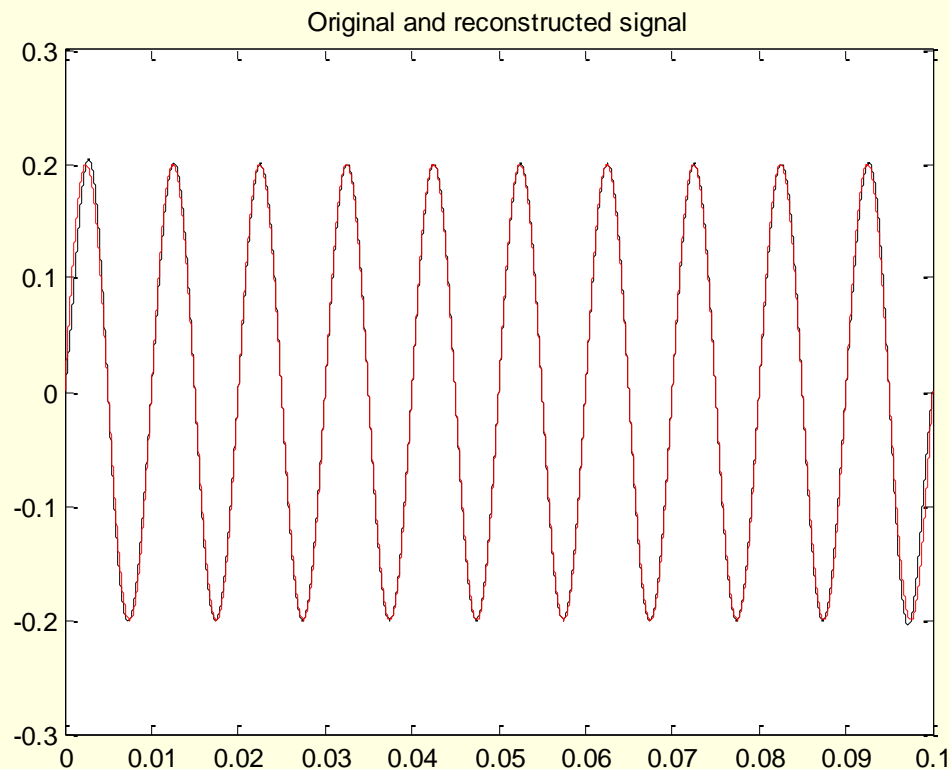
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=500\text{Hz}$$



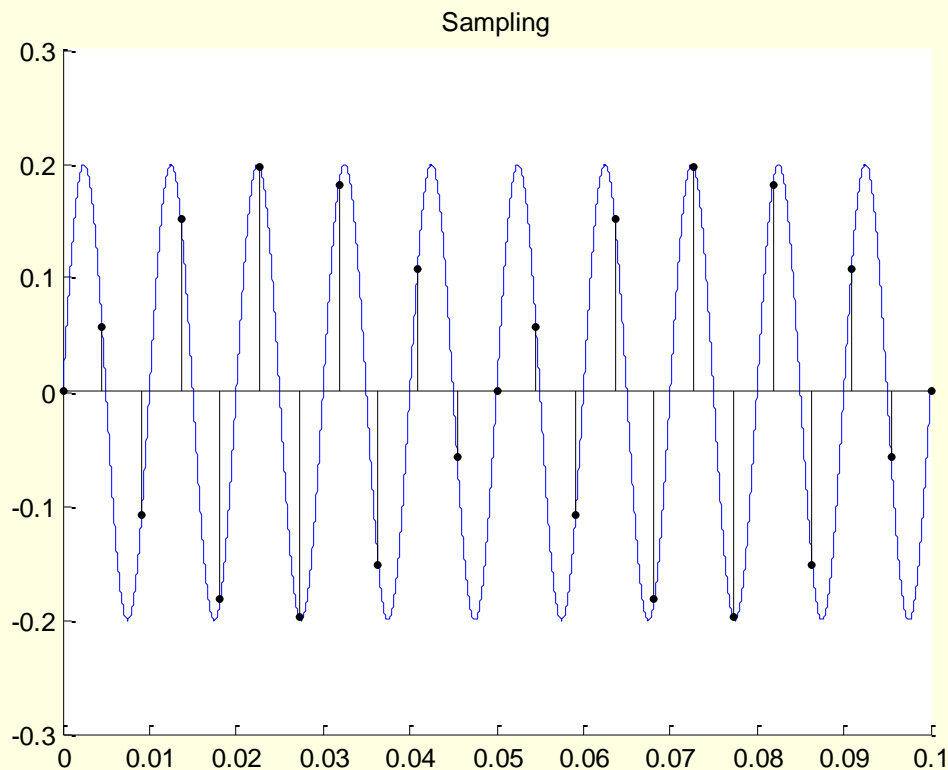
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=210\text{Hz!!!!}$$



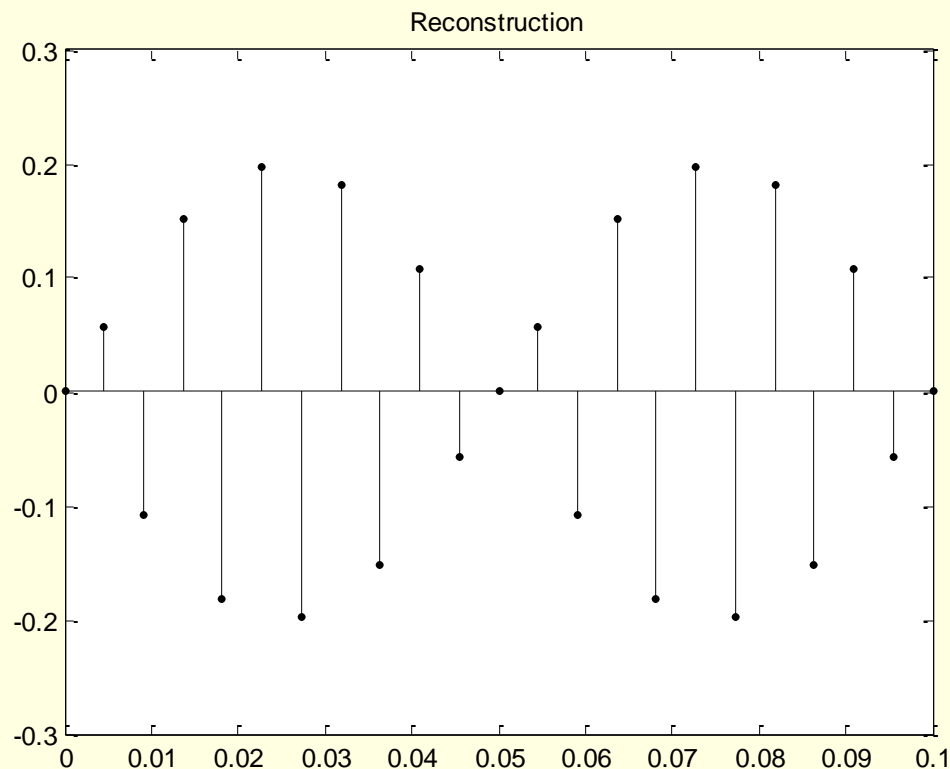
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=210\text{Hz!!!!}$$



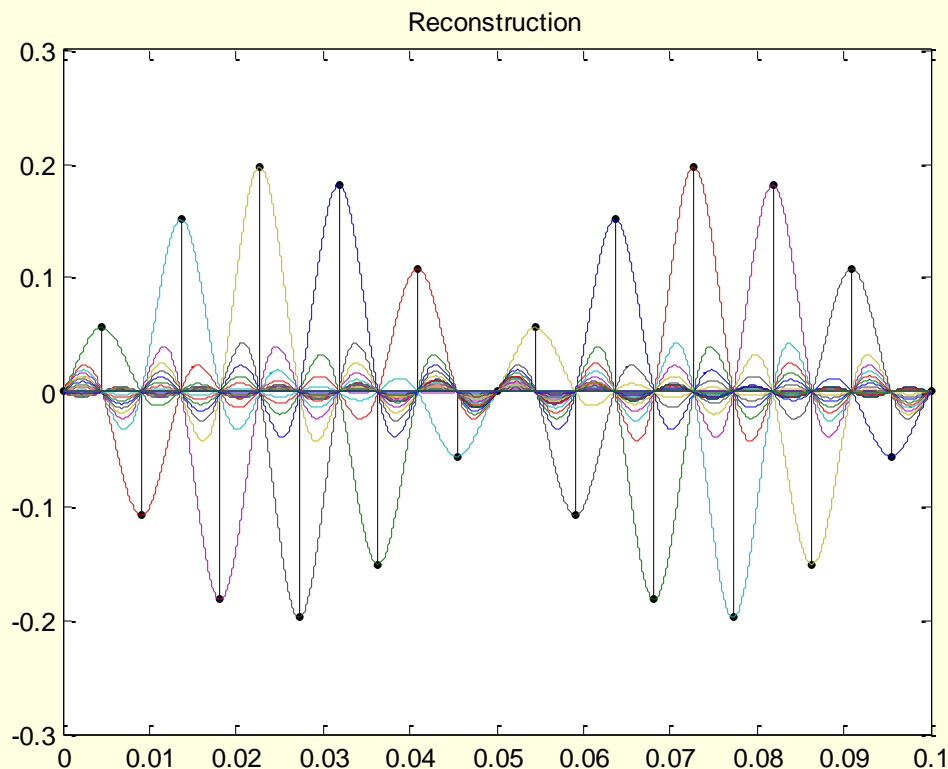
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=210\text{Hz!!!!}$$



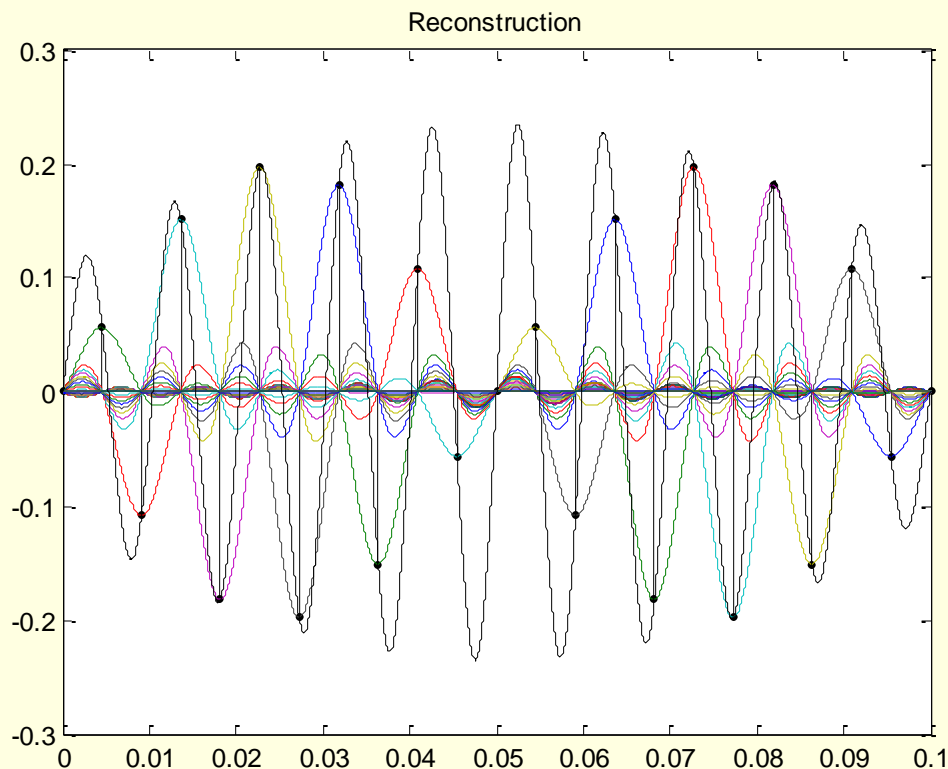
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

$$f_s=210\text{Hz!!!!}$$



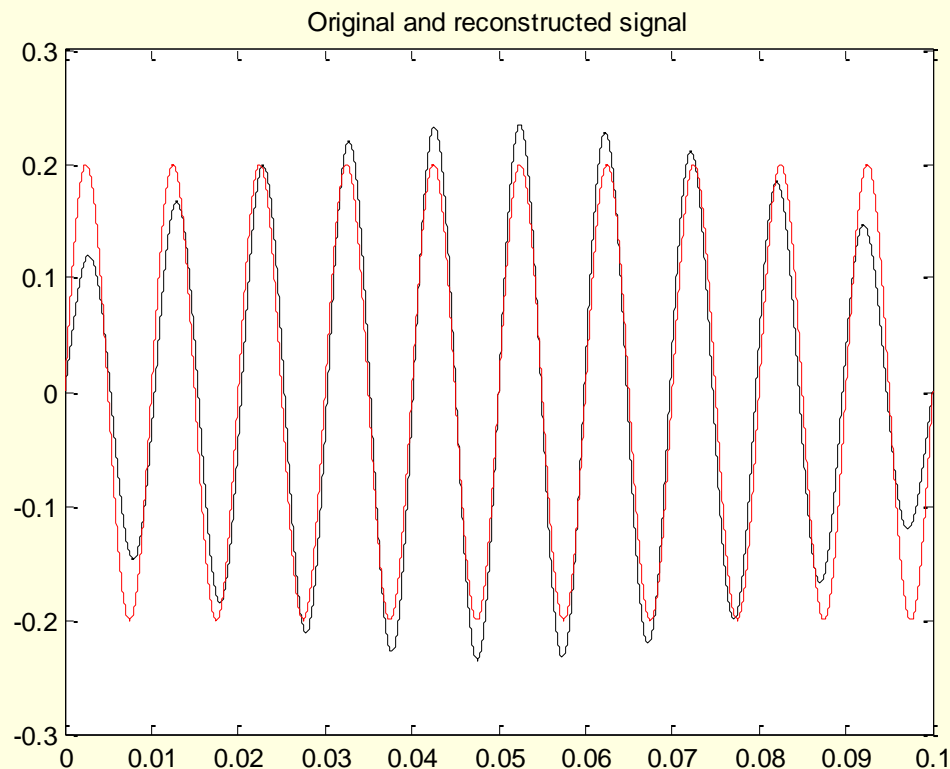
Rekonstrukcja sygnału analogowego z sygnału dyskretnego

Sinusoida:

$$A=0.2$$

$$f_x=100\text{Hz}$$

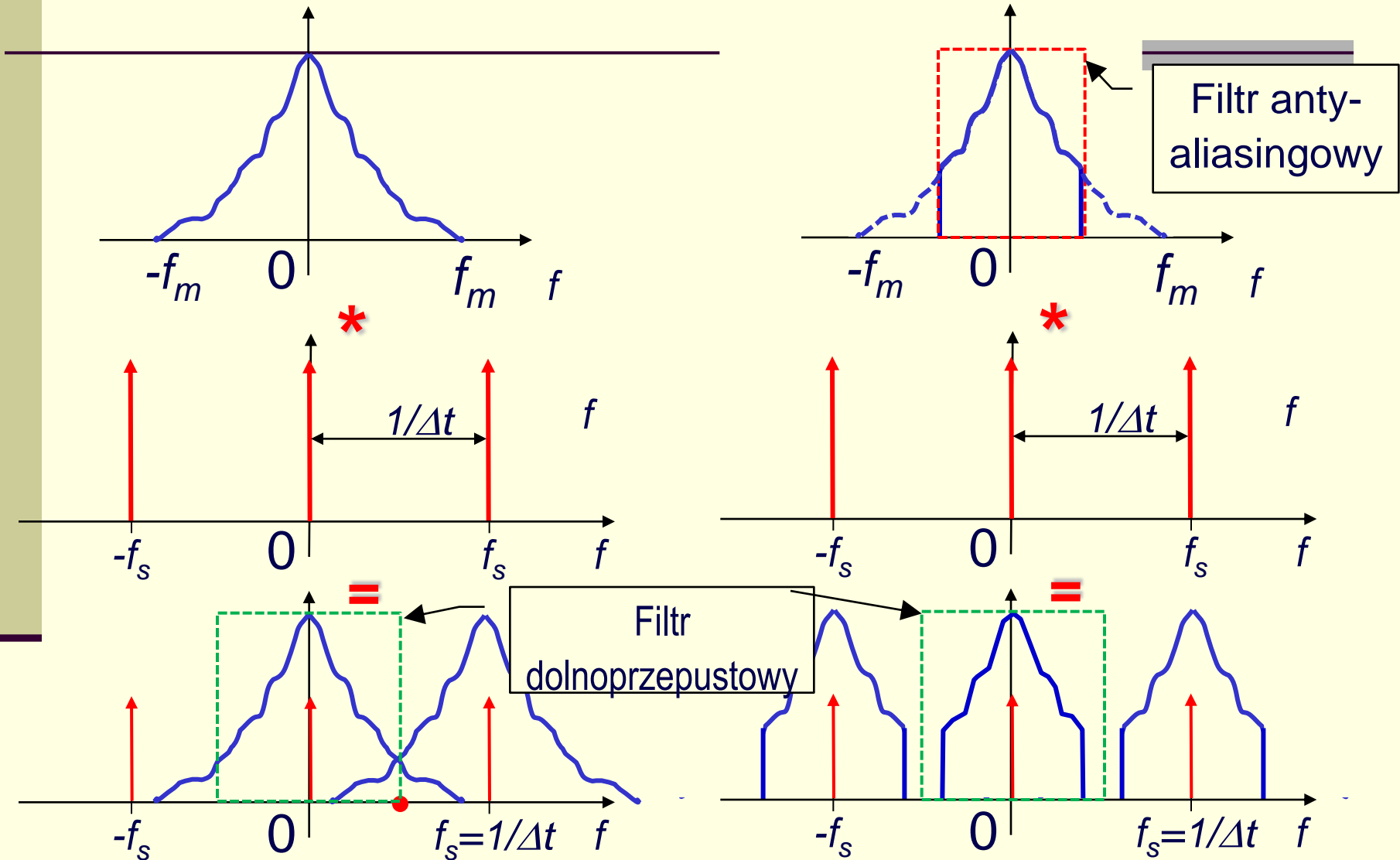
$$f_s=210\text{Hz!!!!}$$



Sygnał oryginalny i zrekonstruowany.

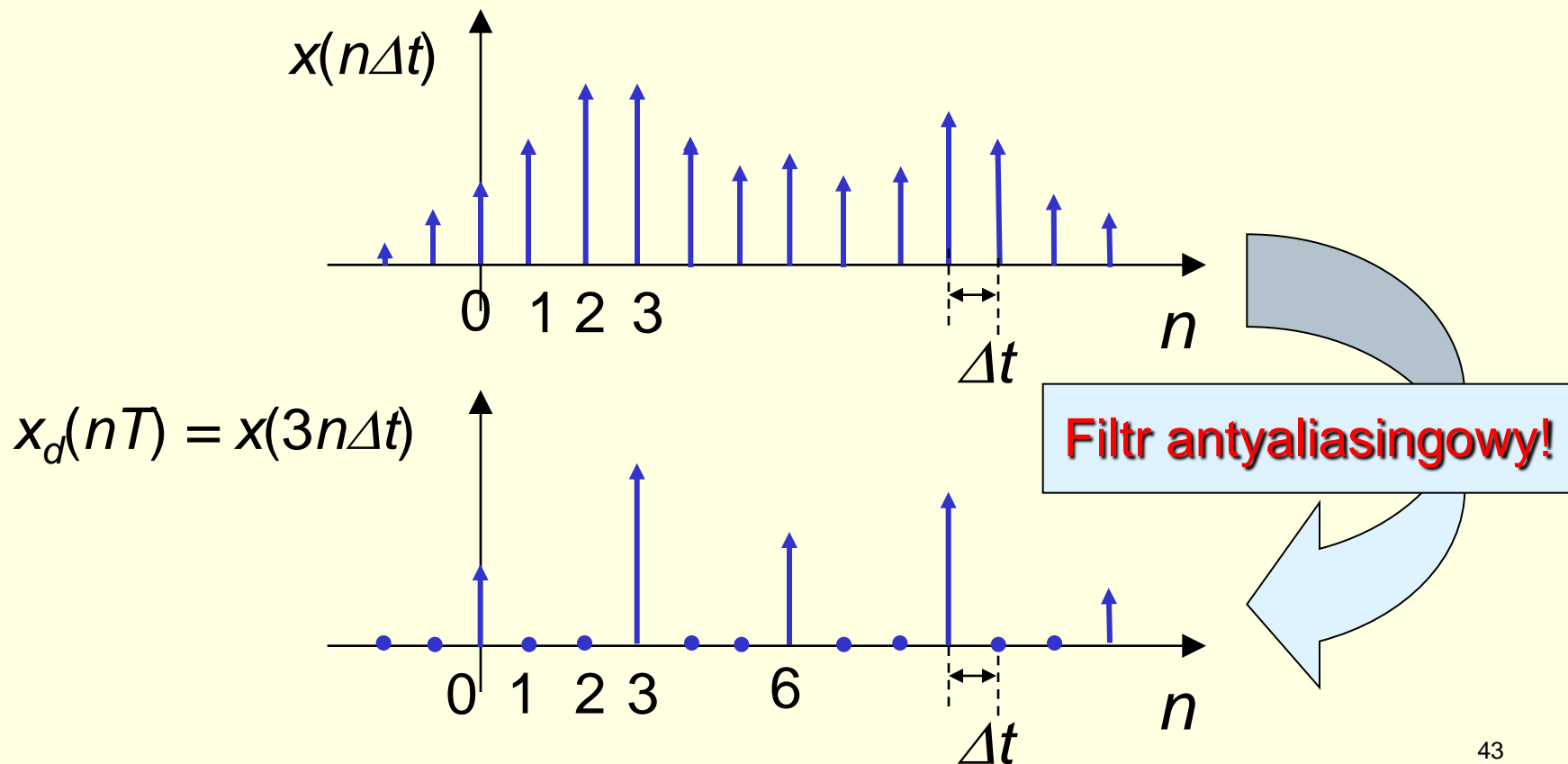
Widoczne efekty brzegowe

Filtr antyaliasingowy

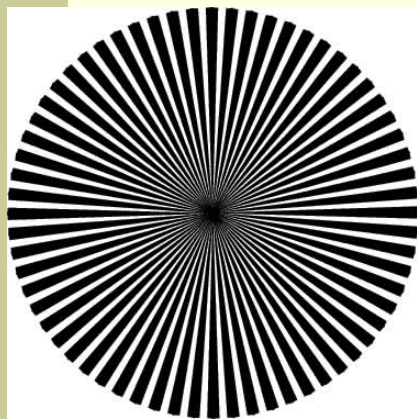


Zmiana szybkości próbkowania

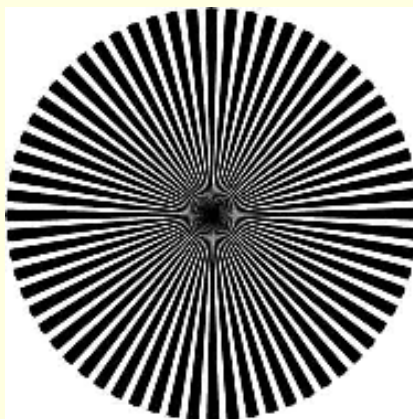
Decymacja:



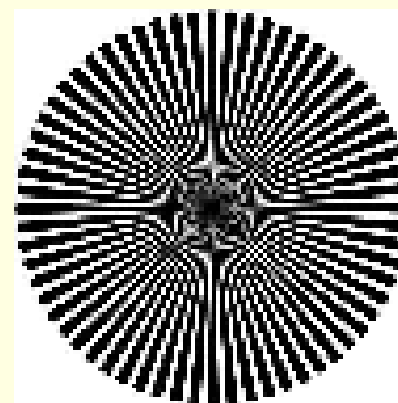
Zmiana szybkości próbkowania



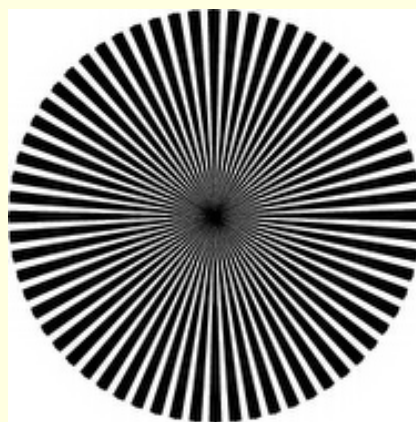
Obraz źródłowy
próbkowany
z szybkością fs



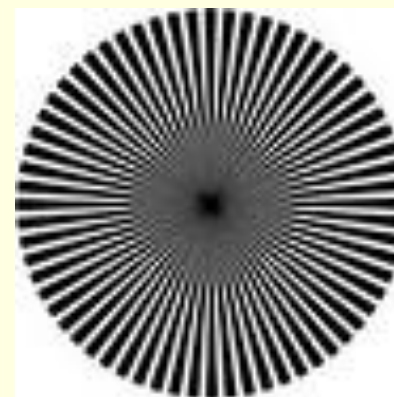
Próbkowany z szybkością 0.5fs



Próbkowany z szybkością 0.25fs



Filtrowany i próbkowany z szybkością 0.5fs

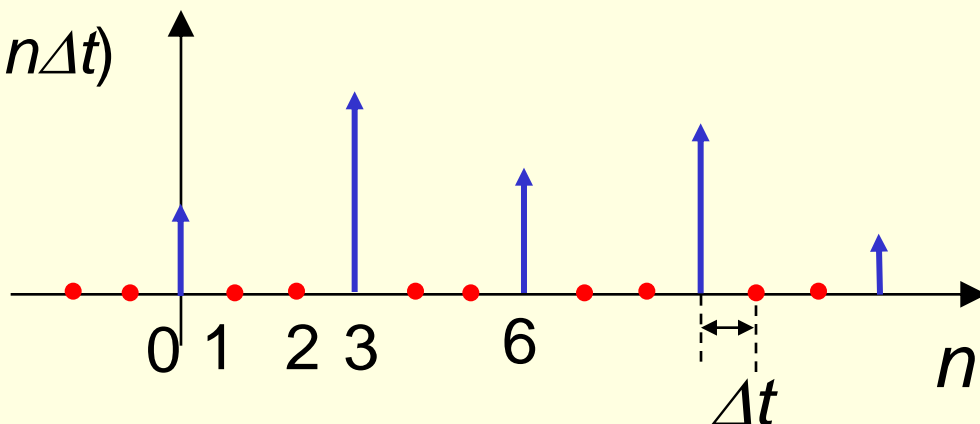


Filtrowany i próbkowany z szybkością 0.25fs

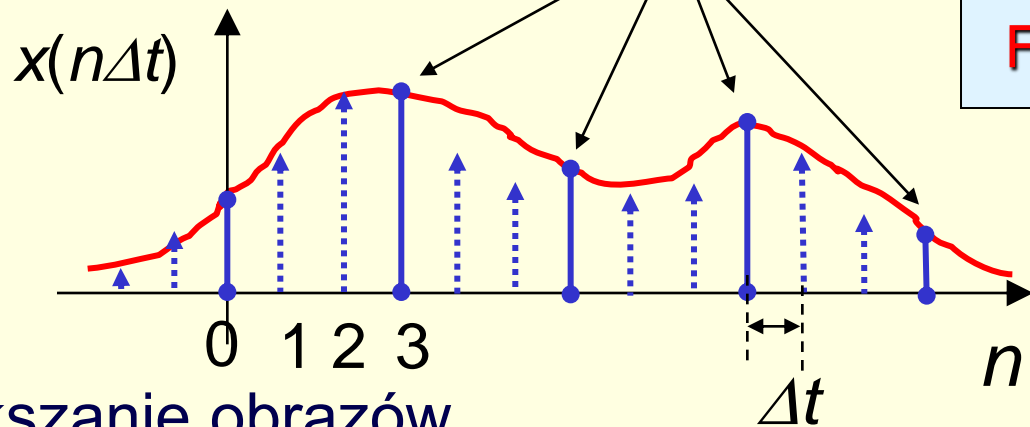
Zmiana szybkości próbkowania

Interpolacja:

$$x_d(nT) = x(3n\Delta t)$$



Węzły interpolacji



Filtr interpolacyjny

np. powiększanie obrazów

Podsumowanie

1. Próbkowanie sygnału
2. Replikacja widma
3. Twierdzenie o próbkowaniu $f_s > 2f_m$
4. Rekonstrukcja sygnału analogowego na podstawie sygnału próbkowanego
5. Zmiana szybkości próbkowania