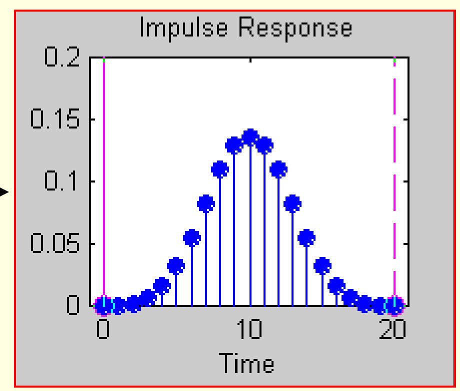
Filtry cyfrowe

Procesory sygnałowe (DSP), układy programowalne

$x(n)$ → Filtr cyfrowy → $y(n)$

$h(n)$ – odpowiedź impulsowa

$x(n)$ →

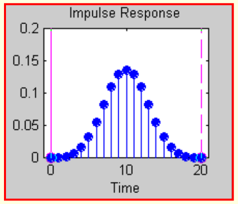


→ $y(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Filtry cyfrowe

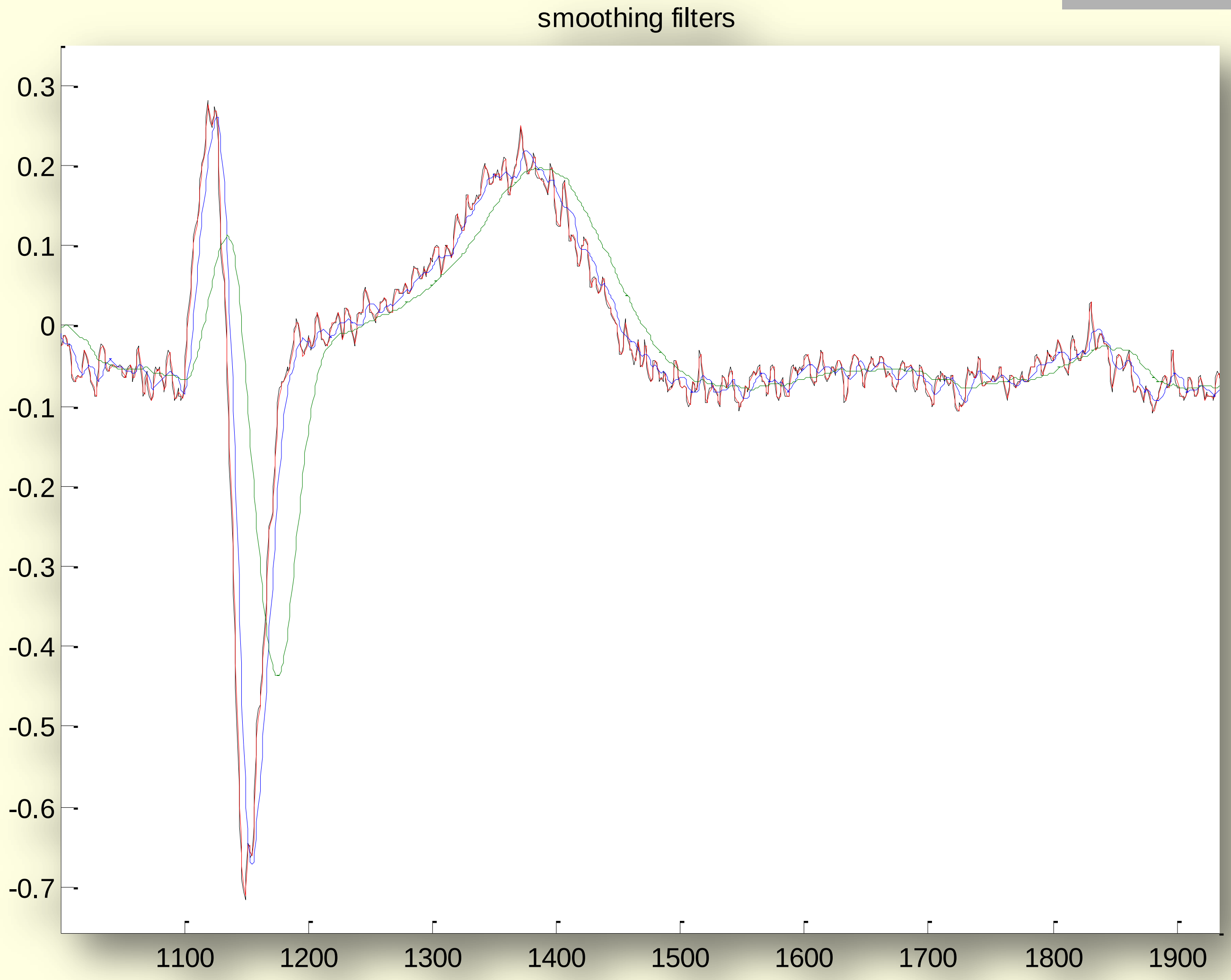


Po co filtrujemy sygnały?

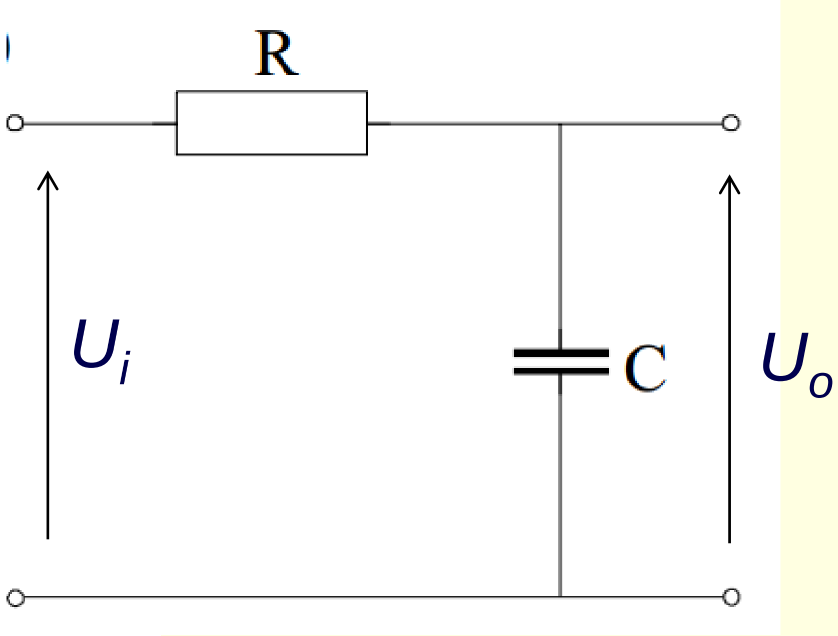
<u>Aby uzyskać:</u>

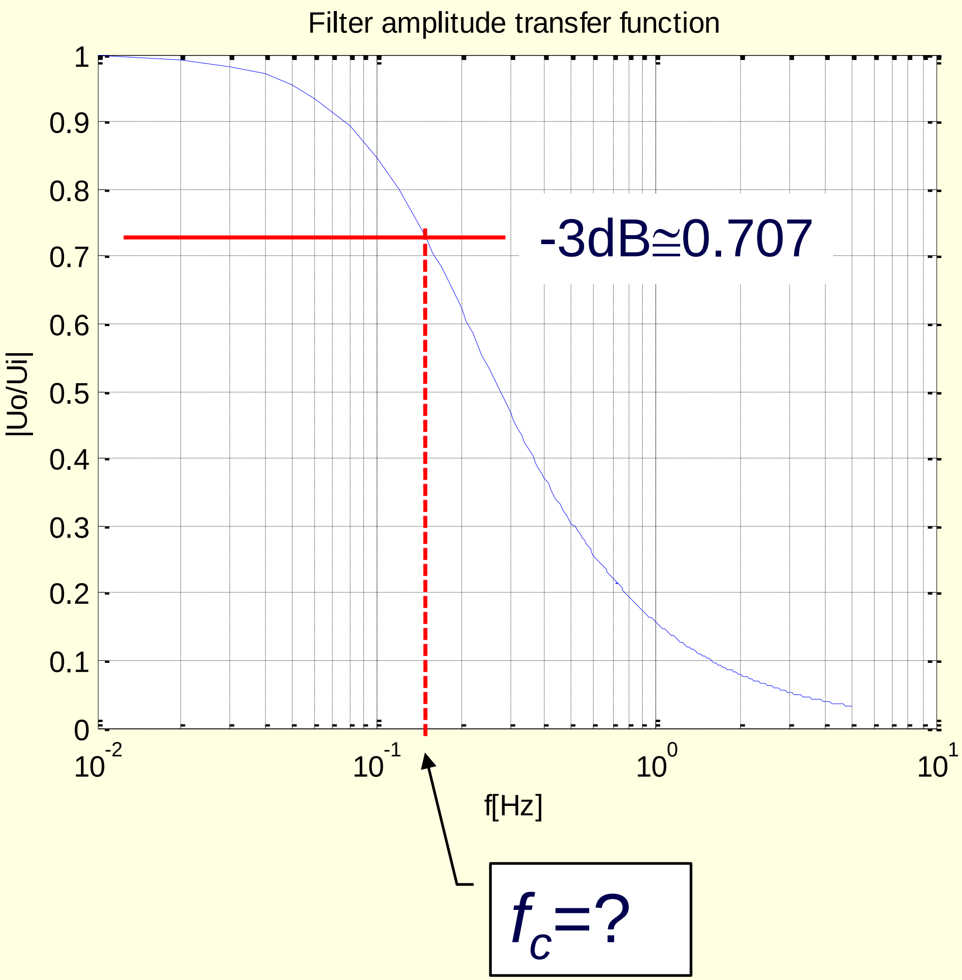
- redukcję zakłóceń sygnału (np. *zakłóceń od sieci energetycznej*)
- zmianę charakterystyki widmowej sygnału (*preemfaza, deemfaza*)
- wyodrębnienie zadanych składowych sygnału spośród jego innych składowych (*detekcja*)

„Wygładzanie” sygnału przez filtrowanie



Analogowy filtr dolnoprzepustowy

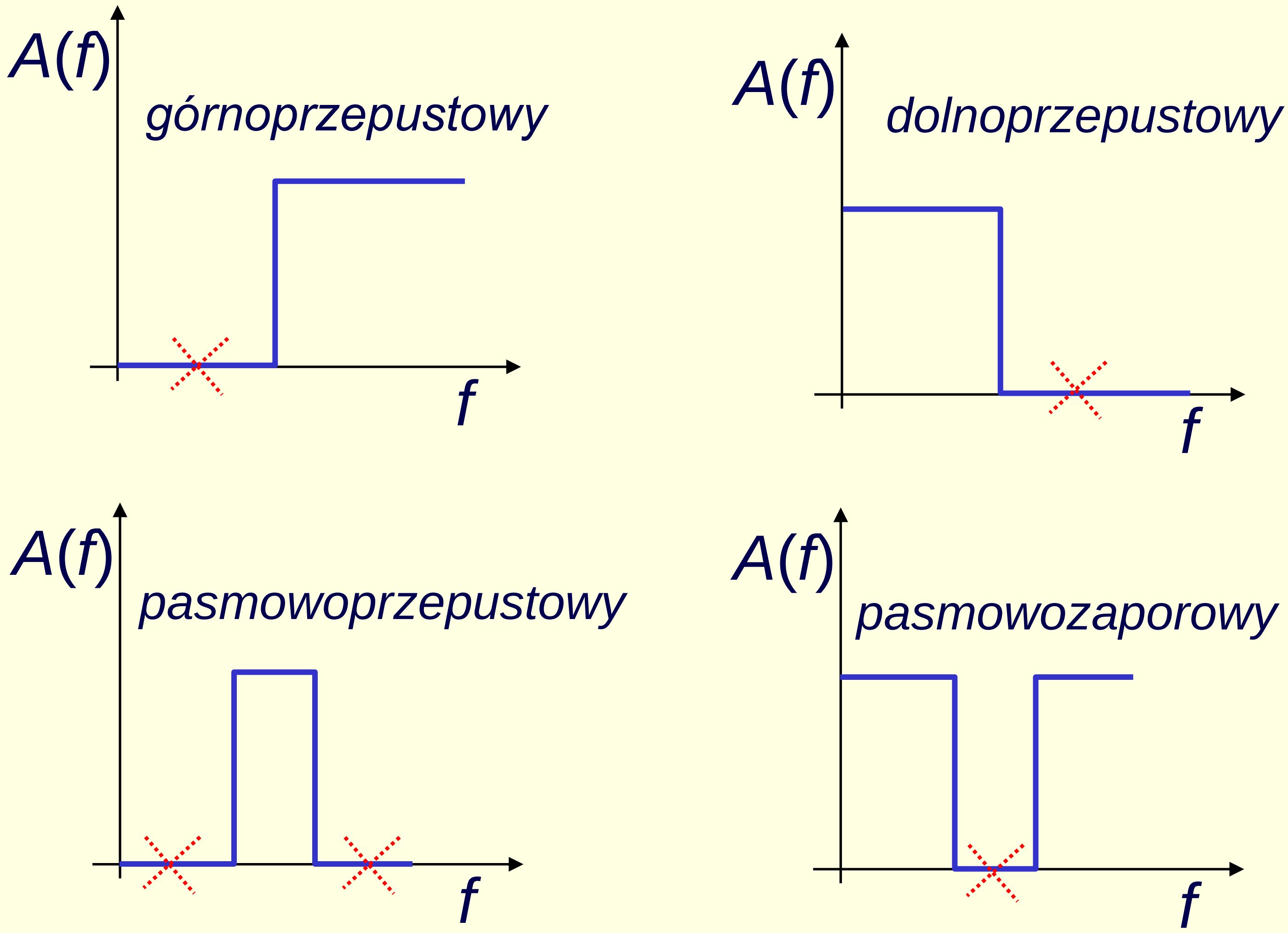




Charakterystyka amplitudowa:

$$\left|\frac{U_o}{U_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

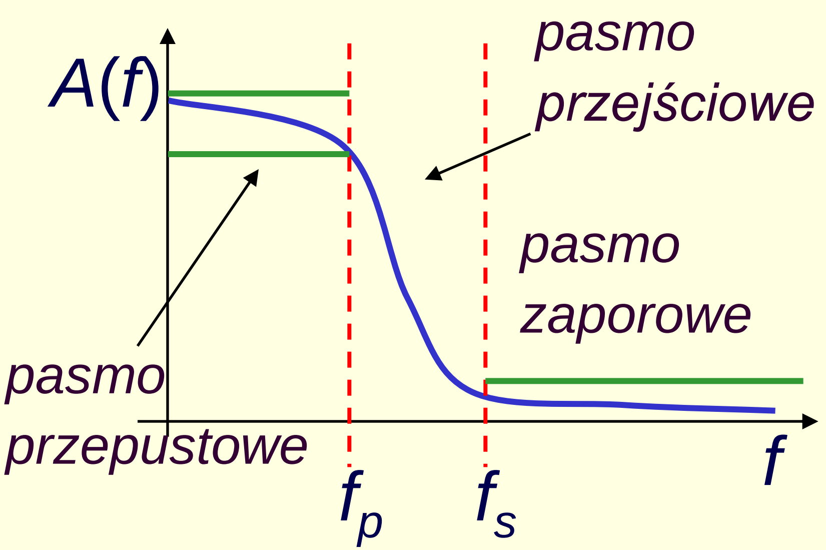
Charakterystyki częstotliwościowe - filtry idealne



Charakterystyki częstotliwościowe filtrów

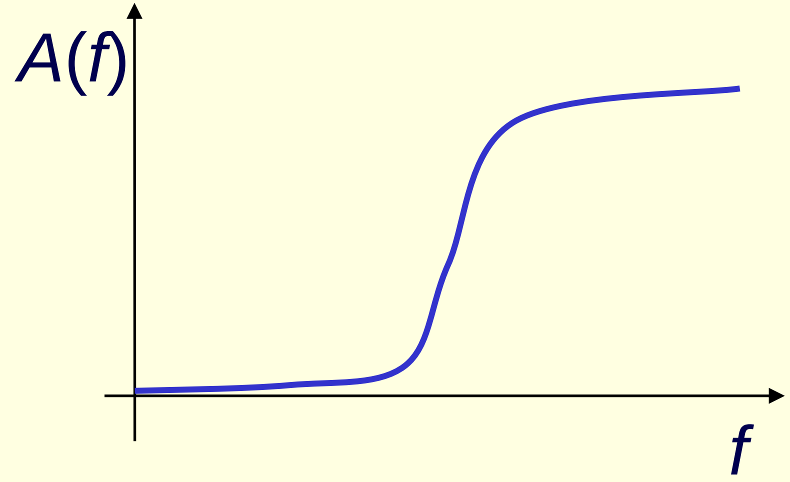
Filtr **dolno-przepustowy**

(np. *filtr anty-alisingowy*, *redukcja zakłóceń*)



Filtr **górno-przepustowy**

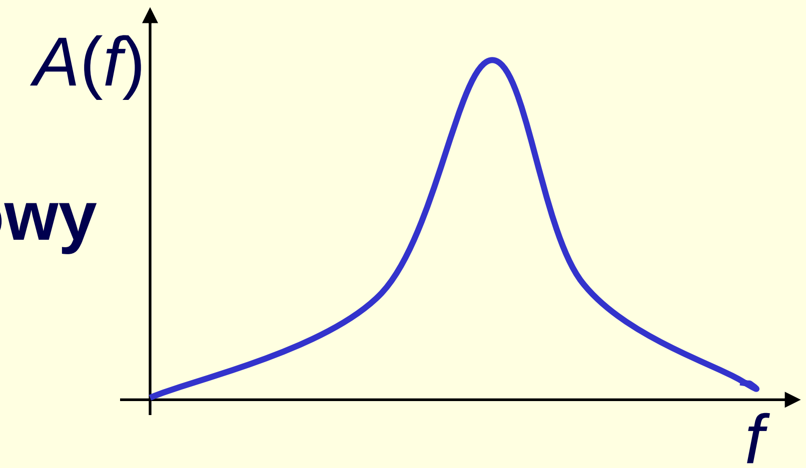
(np. *preemfaza*)



Charakterystyki częstotliwościowe filtrów

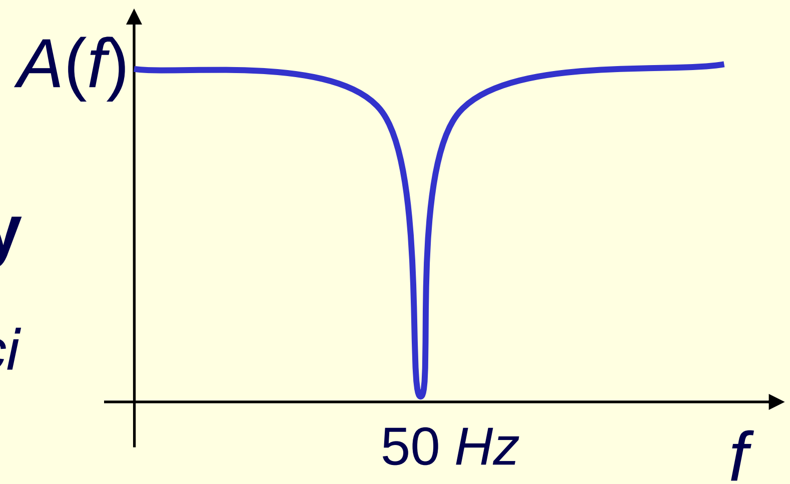
Filtr **środkowo-przepustowy**

(np. *detekcja cech sygnału*)



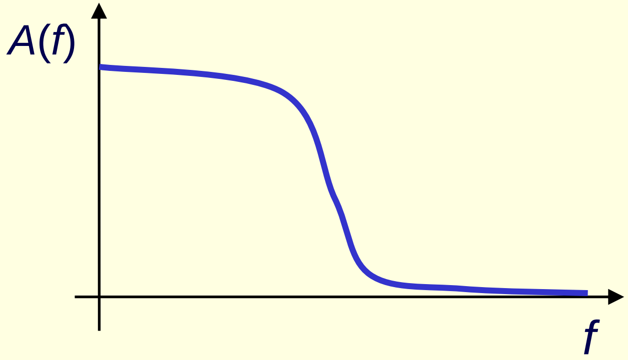
Filtr **środkowo-zaporowy**

(np. *redukcja zakłóceń od sieci energetycznej*)



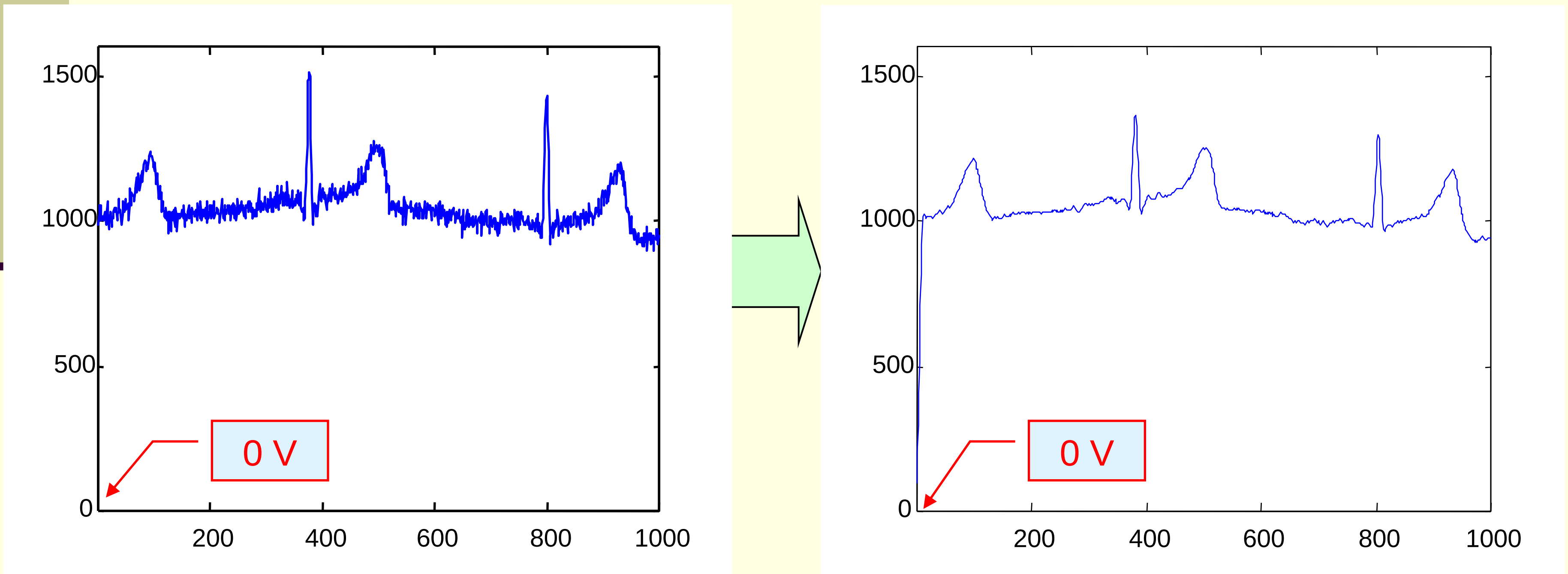
Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów - przykłady

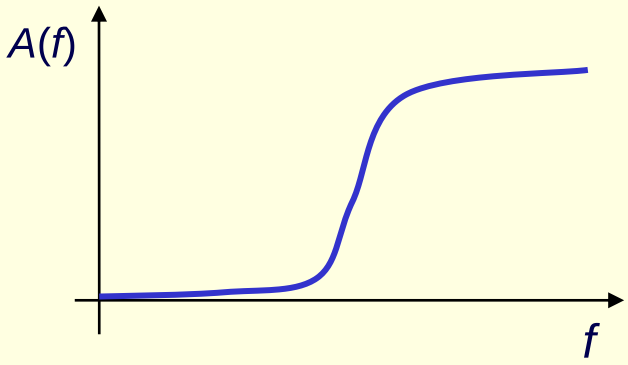


Filtr **dolnoprzepustowy**

(*redukcja zakłóceń*)

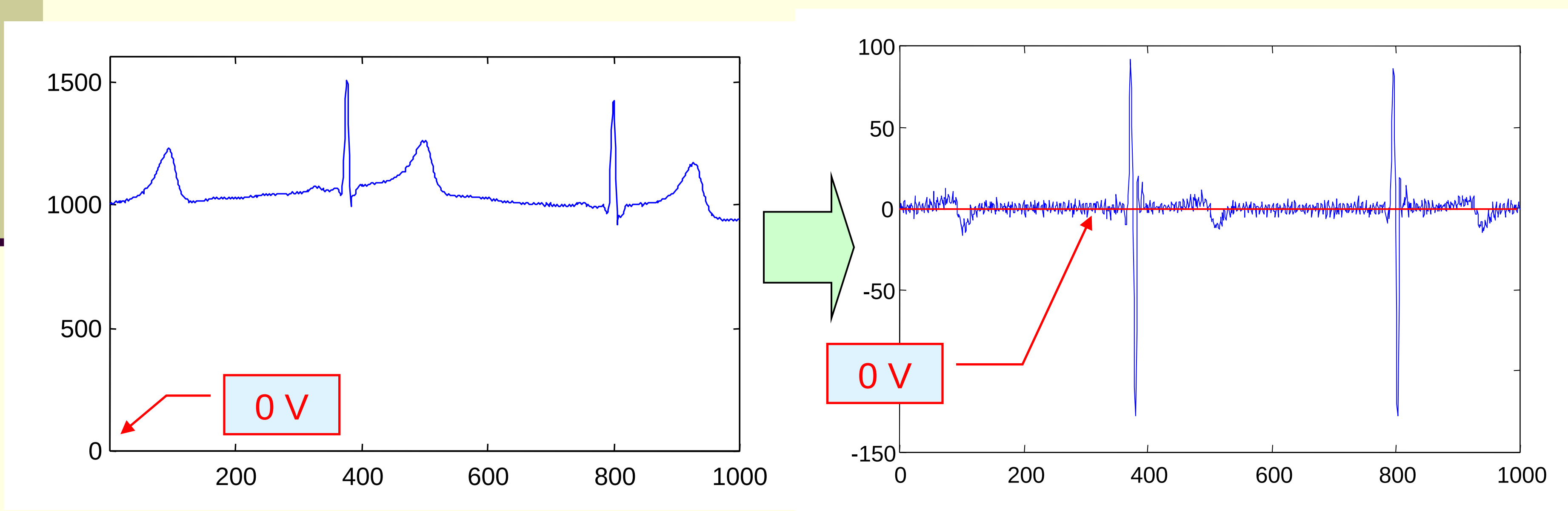


Charakterystyki częstotliwościowe filtrów - przykłady



Filtr **górno-przepustowy**

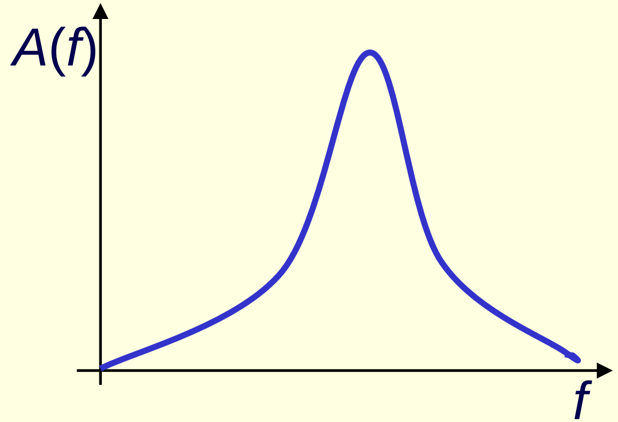
(np. *usuwanie wartości średniej*)

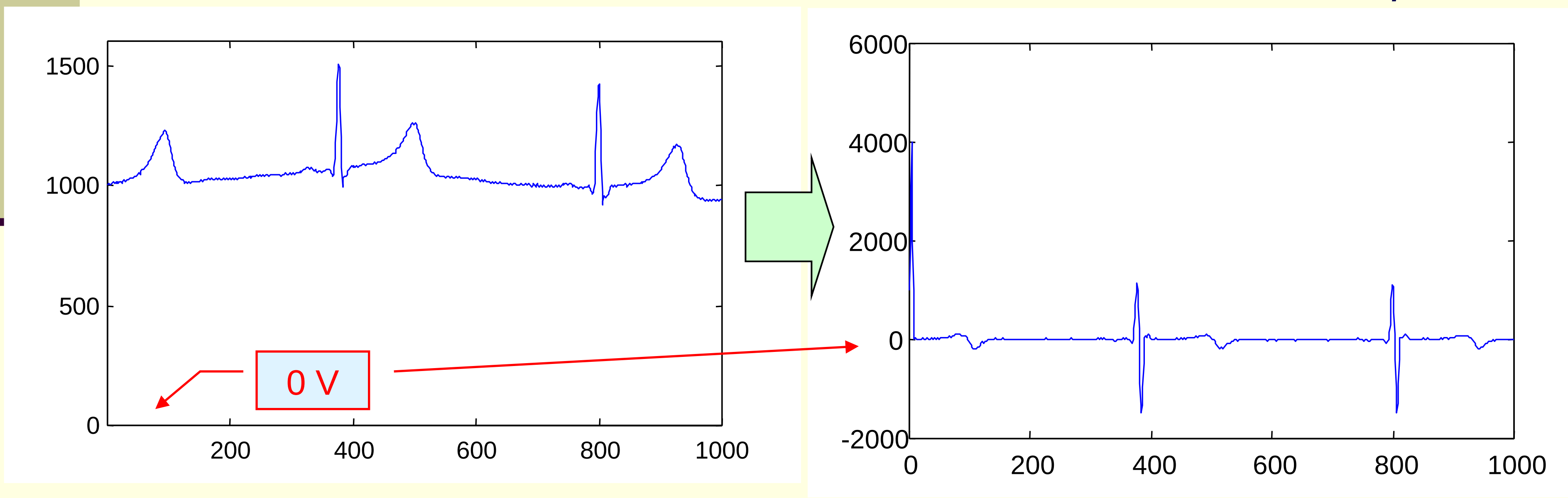


Charakterystyki częstotliwościowe filtrów - przykłady

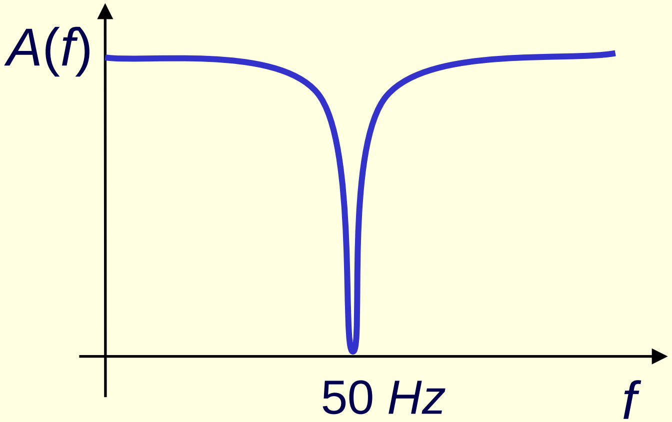
Filtr **środkowo-przepustowy**

(np. *detekcja cech sygnału*)



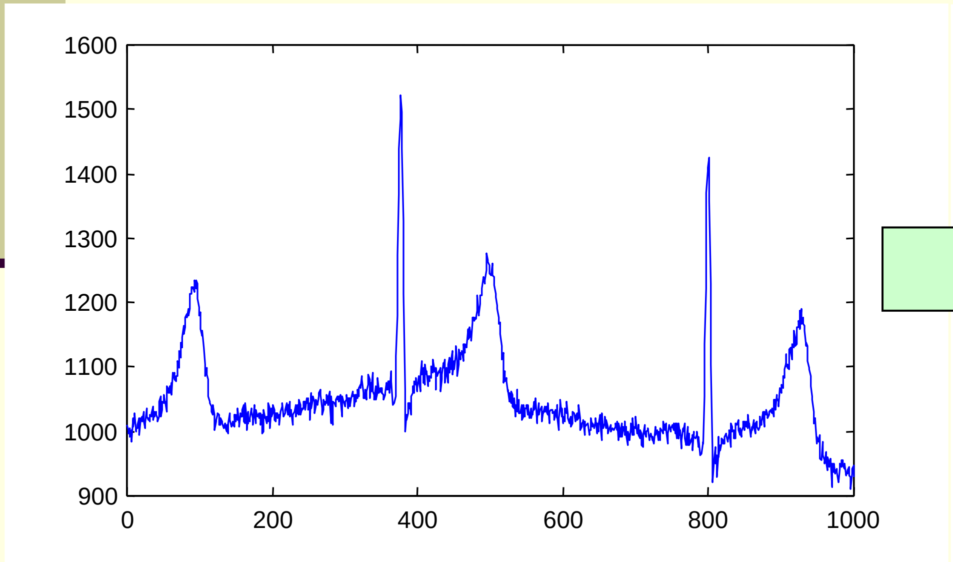


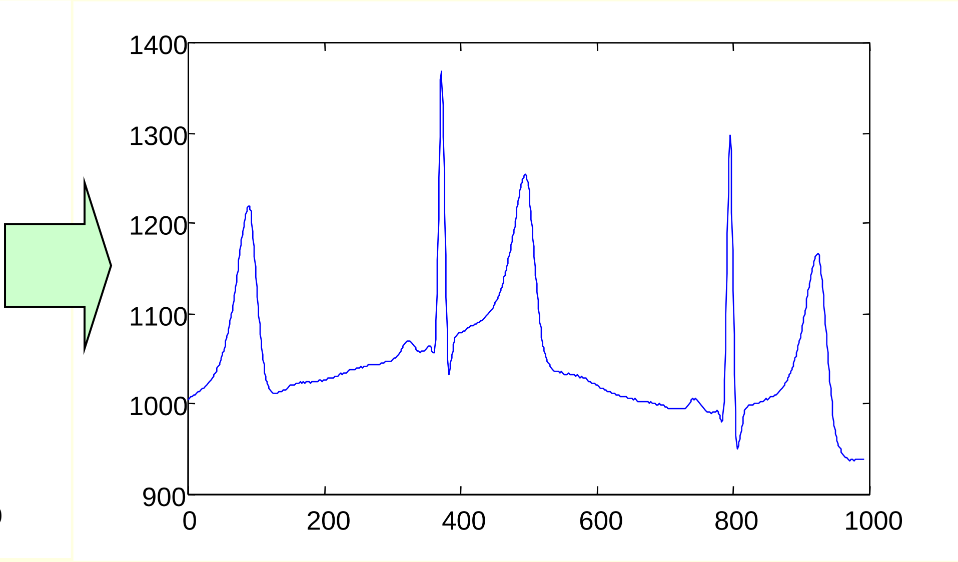
Charakterystyki częstotliwościowe filtrów - przykłady



Filtr **środkowo-zaporowy**

(np. *redukcja zakłóceń o zadanej częstotliwości*)

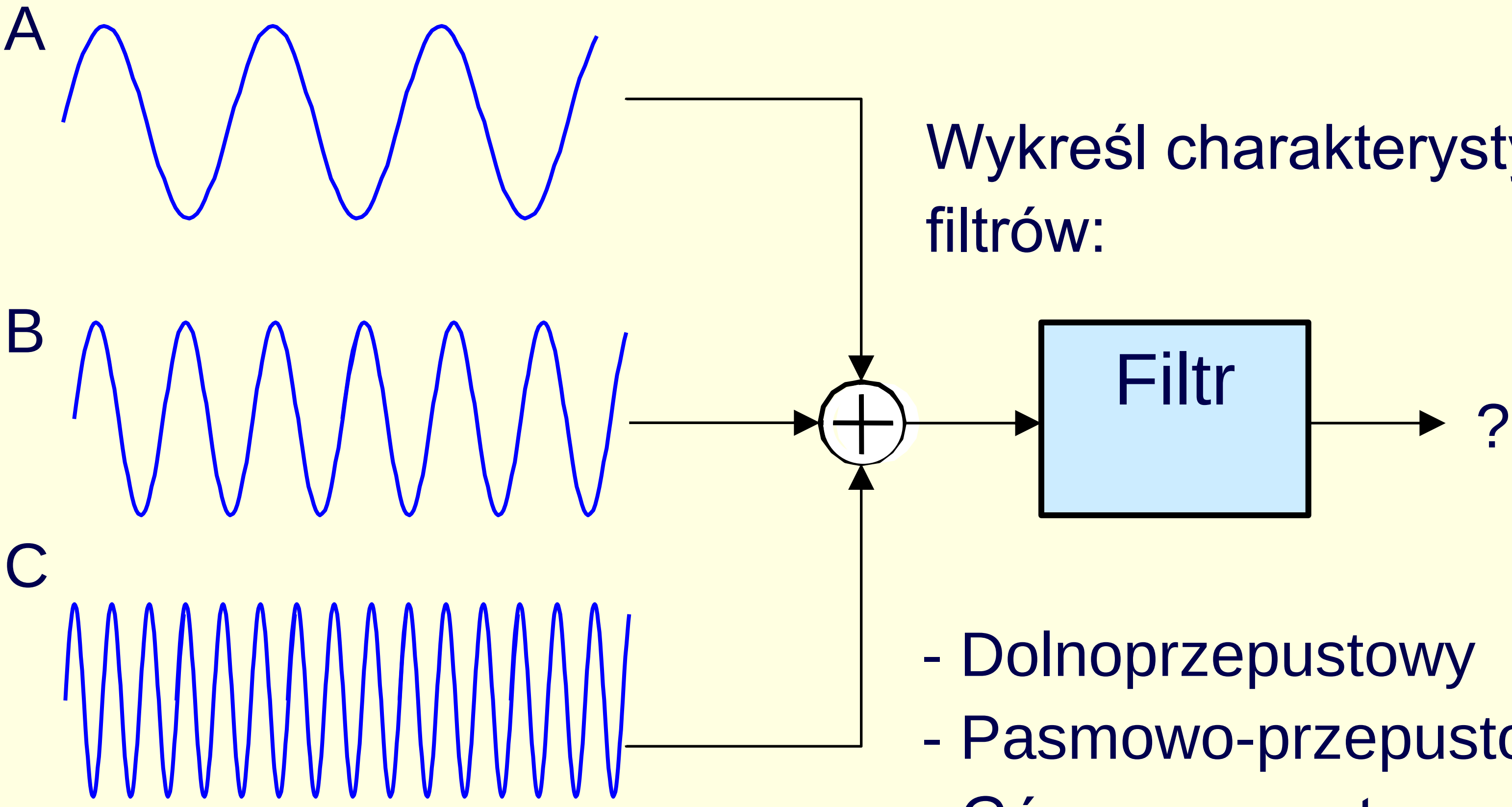




Zastosowania filtrów cyfrowych w przetwarzaniu elektrokardiogramu

- **donoprzepustowe** (redukcja zakłóceń o częstotliwościach radiowych, aktywności mięśni szkieletowych)
- **górnoprzepustowe** (eliminacja pełzania linii izoelektrycznej, f_g=0.5 Hz, zob. '`ecg_mit.mat`')
- **pasmowoprzepustowe** (wydzielanie składowych sygnału EKG, np. fali P, T, QRS)
- **pasmowozaporowe** (redukcja zakłóceń od sieci energetycznej, f=50 Hz)

Rodzaje filtrów



Wykreśl charakterystyki filtrów:

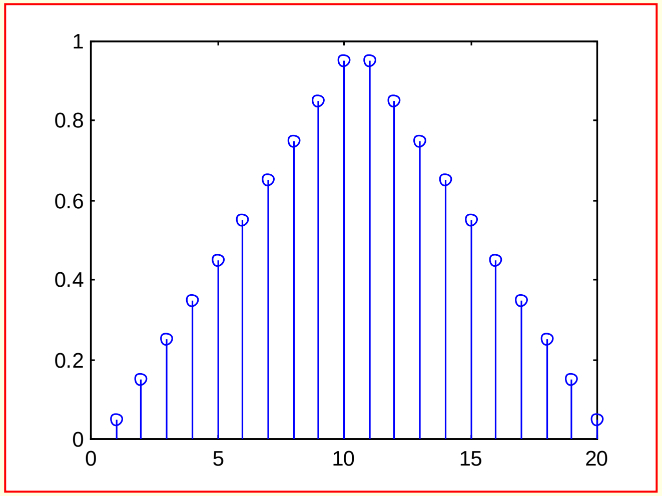
- Dolnoprzepustowy
- Pasmowo-przepustowy
- Górnoprzepustowy

Filtry cyfrowe – SOI i NOI

Filtry dzielimy również na:

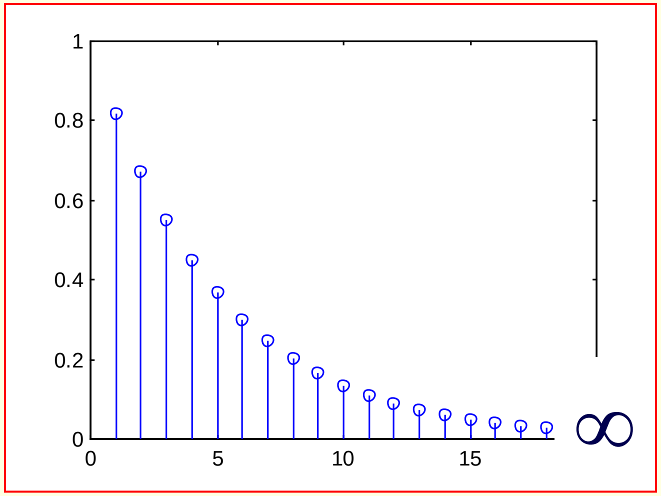
filtry o **s**kończonej **o**dpowiedzi **i**mpulsowej (**SOI**)

tzw. ***filtry nierekursywne***



filtry o **n**ieskończonej **o**dpowiedzi **i**mpulsowej (**NOI**)

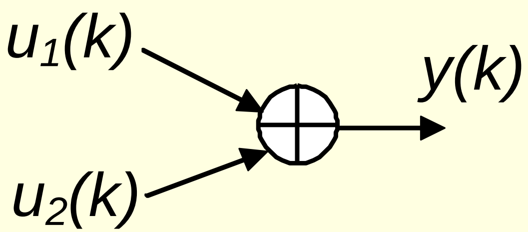
tzw. ***filtry rekursywne***



Filtry cyfrowe – SOI i NOI

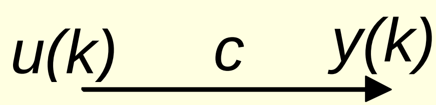
Elementy (działania) potrzebne realizacji filtru cyfrowego:

Sumator



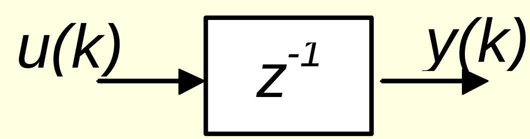
$$y(k) = u_1(k) + u_2(k)$$

Mnożenie przez stałą



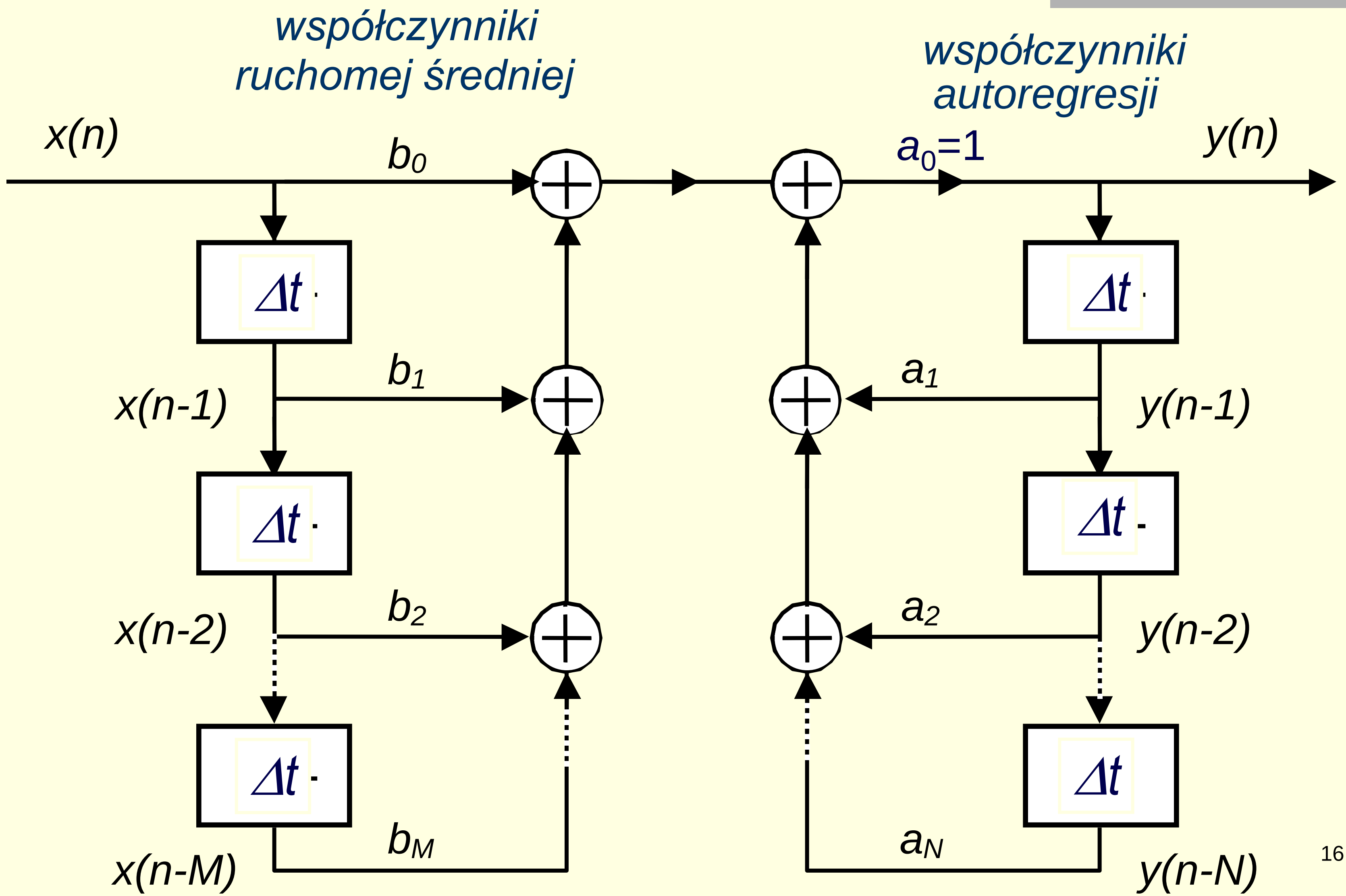
$$y(k) = cu(k)$$

Opóźnienie jednostkowe

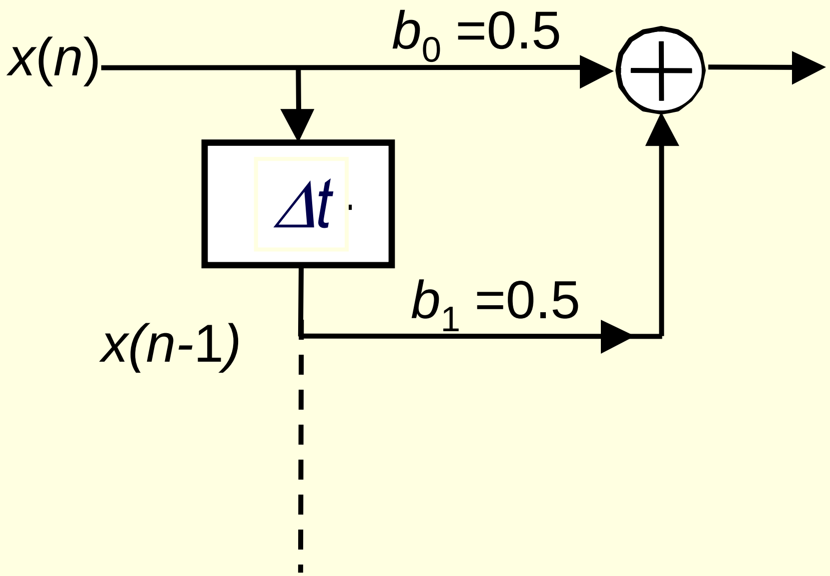


$$y(k) = u(k-1)$$

Idea filtracji cyfrowej



Filtr o Skończonej Odpowiedzi Impulsowej(SOI) - przykład



LP:

$$y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$$

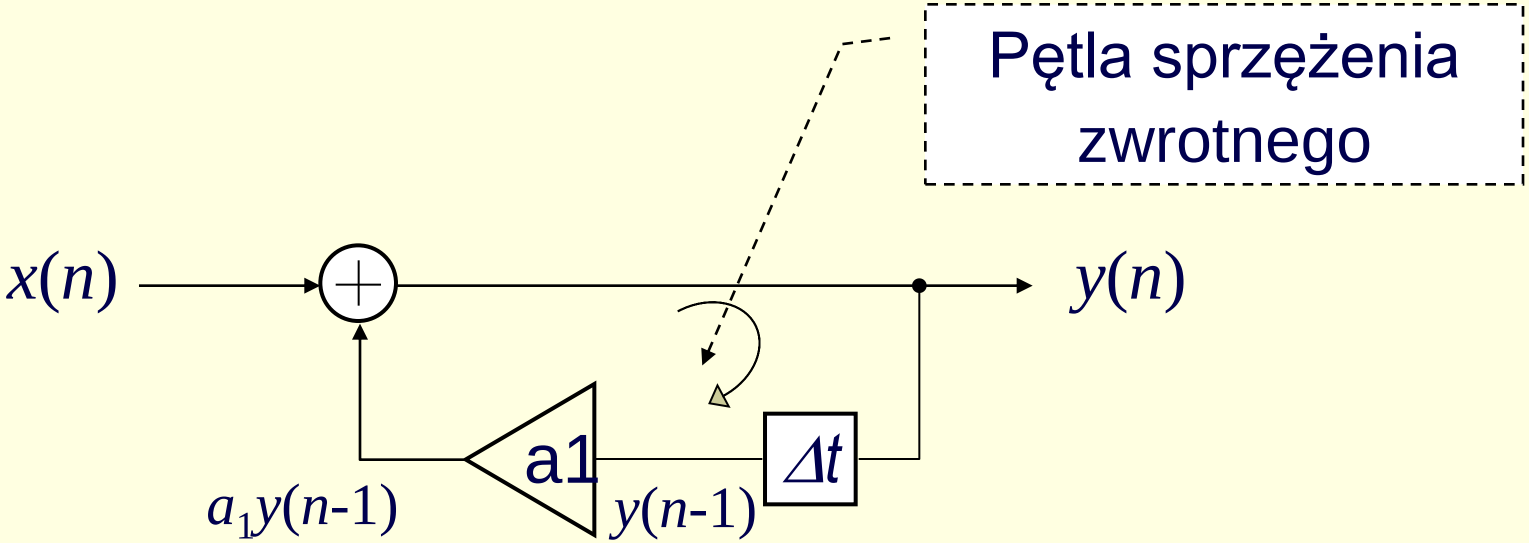
HP:

$$y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1)$$

BP: ?

Filtr o Nieskończonej odpowiedzi Impulsowej (NOI) - przykład

$$y(n) = a_1 y(n-1) + x(n)$$



Równanie różnicowe filtru

$$\sum_{k=0}^{N} a(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k) x(n-k)$$

Powyższe równanie jest równoważne zapisowi:

$$a[0]=1$$

$$a(0) y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k) x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a(k) y(n-k)$$

Równanie różnicowe filtru

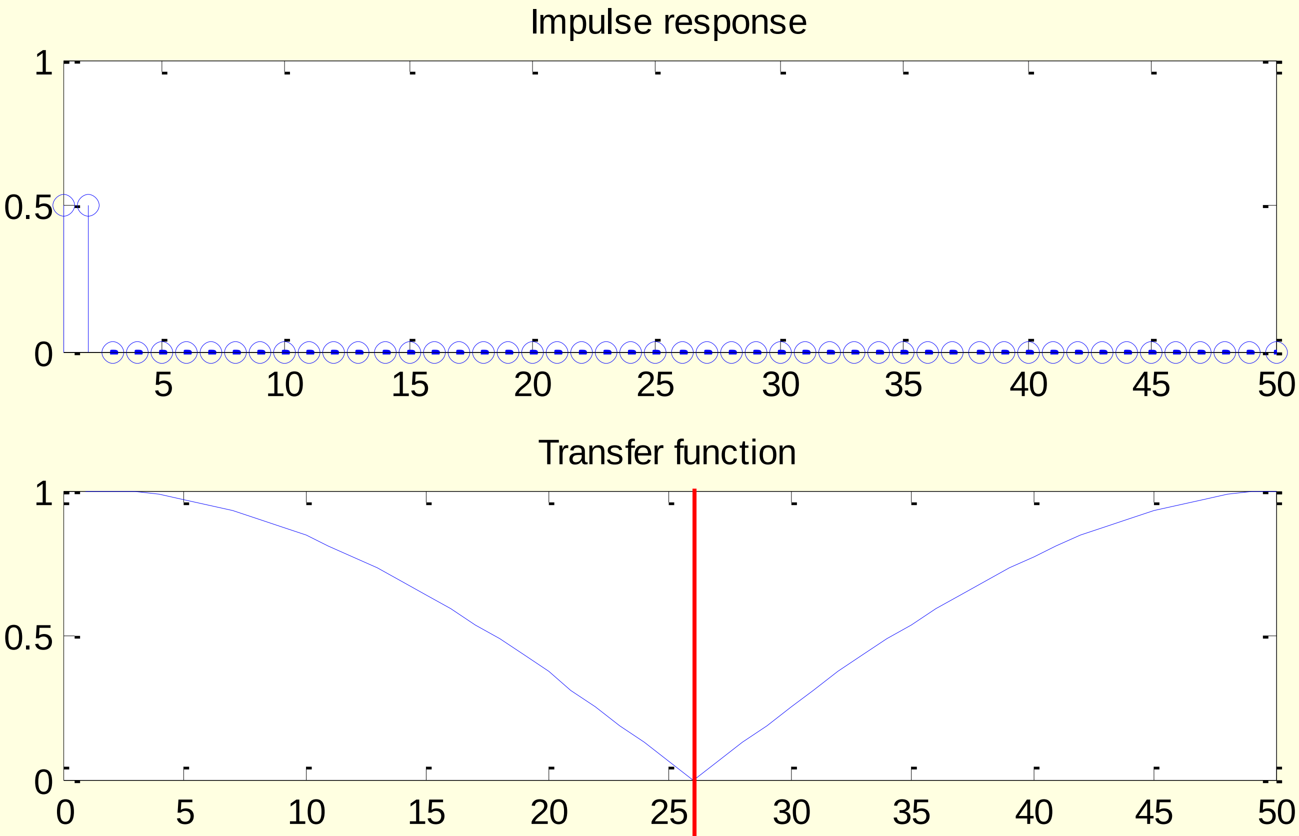
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k)$$

Jeżeli wszystkie współczynniki $a(n)$ są zerowe to równanie różnicowe opisuje filtr cyfrowy SOI, w przeciwnym przypadku filtr NOI

SOI – ang. *Finite Impulse Response* (*FIR*)

NOI – ang. *Infinite Impulse Response* (*IIR*)

Prosty filtr dolnoprzepustowy (freqz)

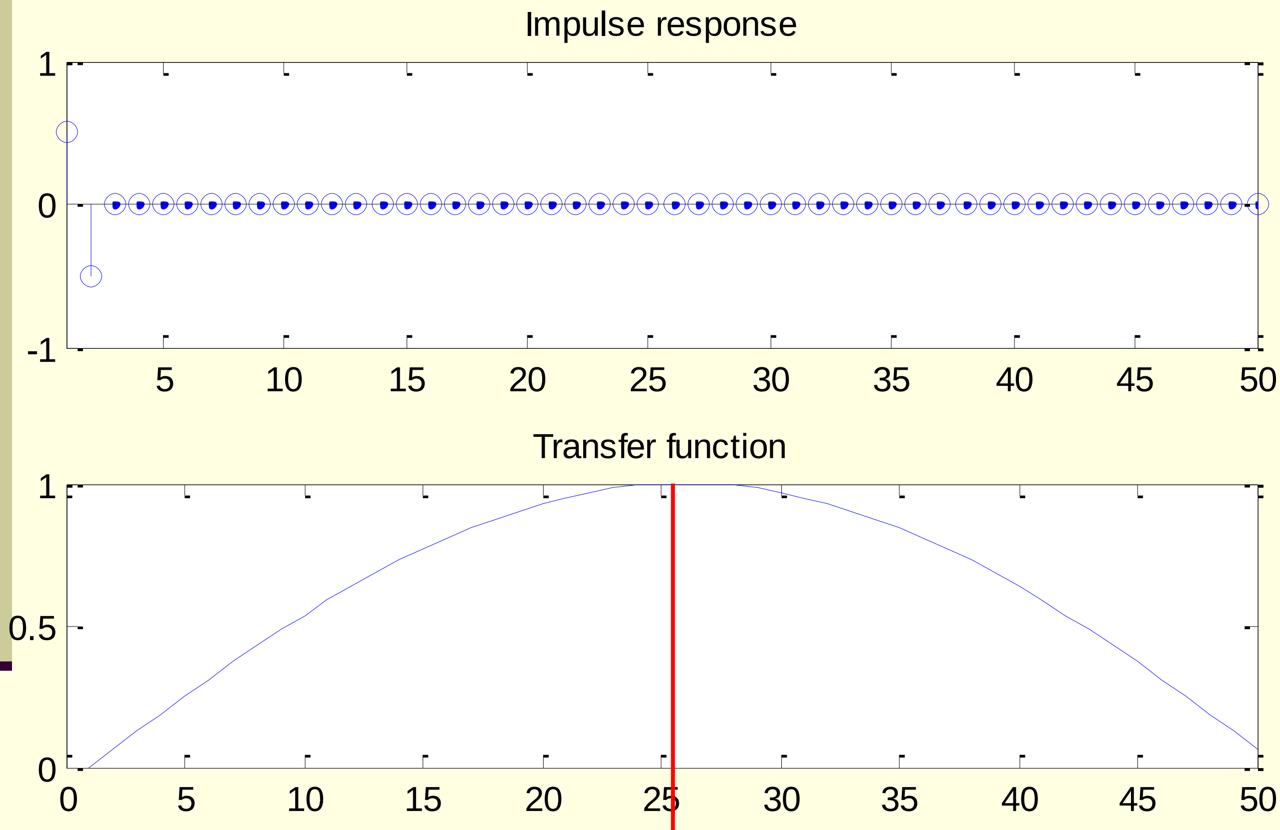


h=[0.5 -0.5]

H_L=FFT(h_L)

$\boxed{N/2+1 \rightarrow f_s/2}$

Prosty filtr górnoprzepustowy (freqz)

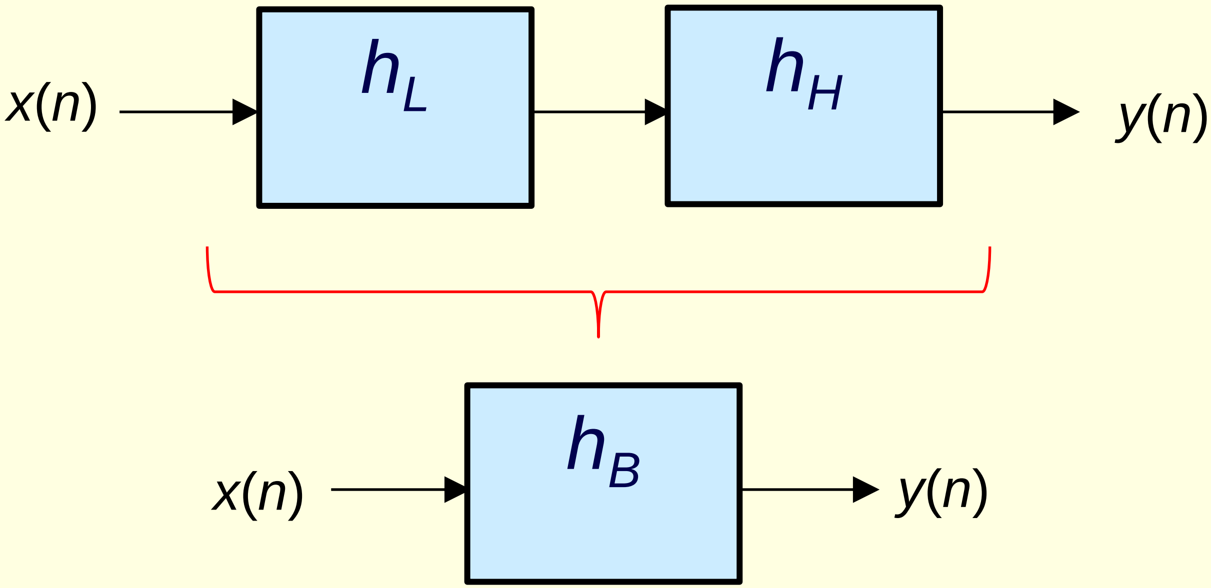


h=[0.5 -0.5]

H_H=FFT(h_H)

$N/2+1 \rightarrow f_s/2$

Połączenie kaskadowe filtrów

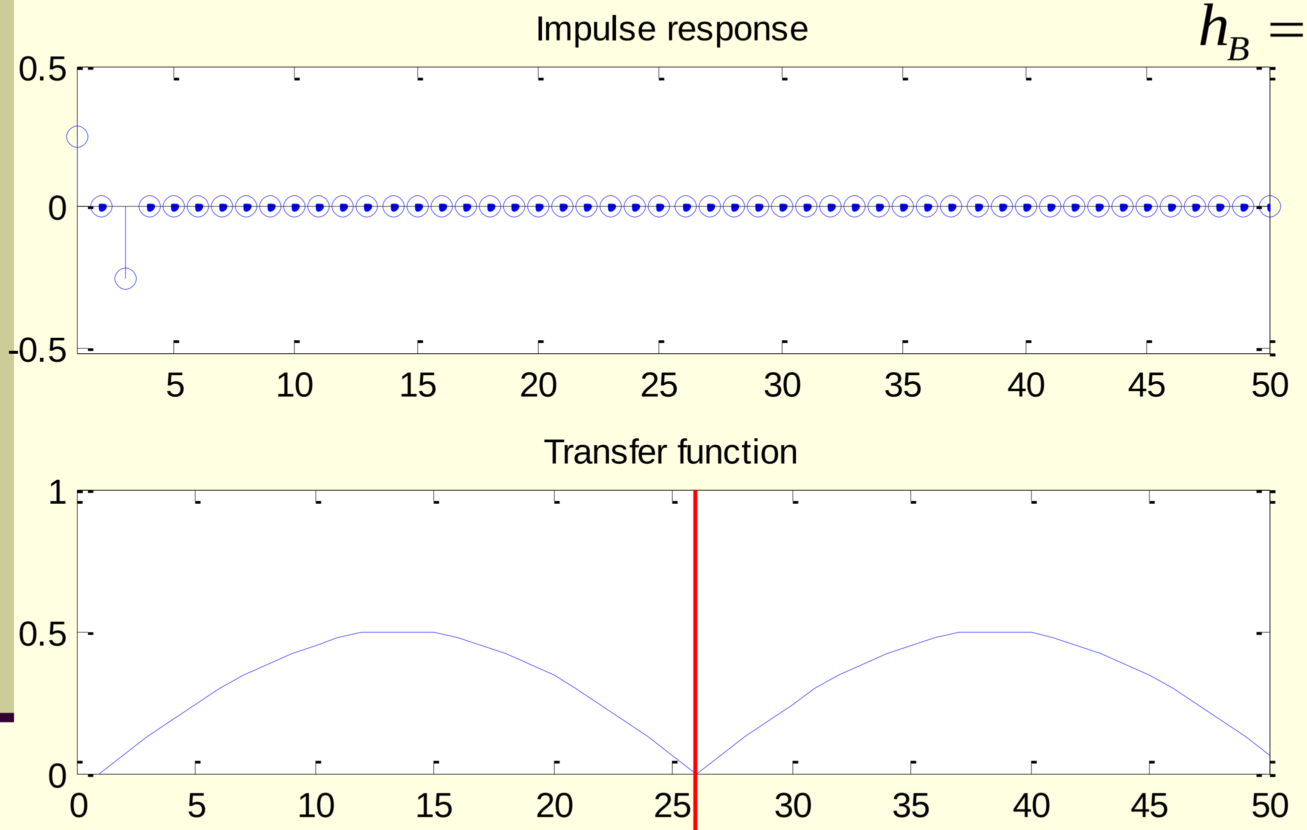


$$h_B = h_L * h_H$$

$$h_B = h_L * h_H \quad \rightarrow \quad H_B(\omega) = H_L(\omega) \cdot H_H(\omega)$$

Prosty filtr pasmowoprzepustowy (freqz)

$$h_B = [0.25 \quad 0 \quad -0.25]$$



$$H_B = FFT(h_B)$$

$$\boxed{N/2+1 \rightarrow f_s/2}$$

Prosty przykład filtru SOI

Filtr o ruchomej średniej:

$$y(n) = \frac{1}{5}\left[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)\right]$$

Określ wektory współczynników *a* i *b* dla tego filtru .

Odpowiedź:

a=[1];
b=[0.2 0.2 0.2 0.2 0.2];

Zatem jest to dolnoprzepustowy filtr SOI

Prosty przykład filtru SOI

Jaka jest odpowiedź impulsowa tego filtru?

$$y(k)=\frac{1}{5}\left[x(k-4)+x(k-3)+x(k-2)+x(k-1)+x(k)\right]=\frac{1}{5}\sum_{n=k-4}^{k}x(n)$$

Odpowiedź:

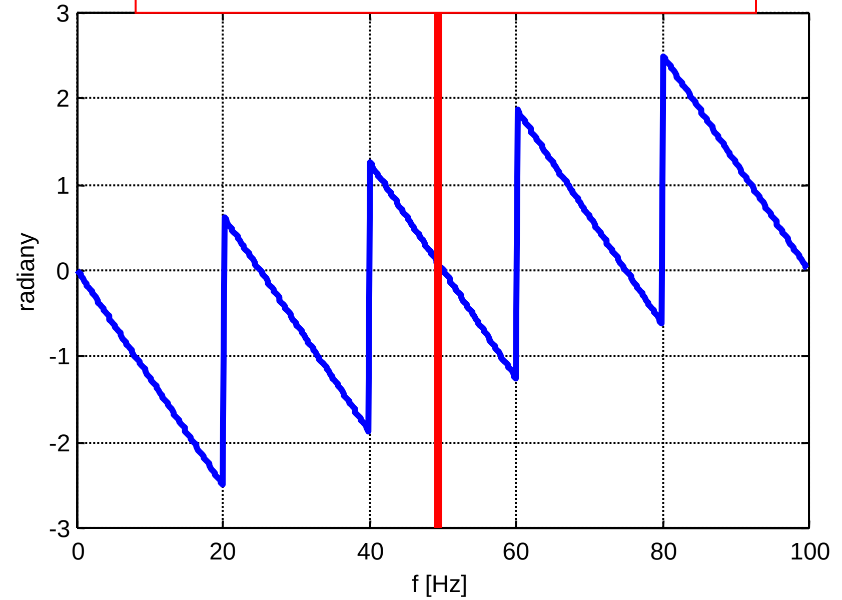
h=[0.2 0.2 0.2 0.2 0.2];

!

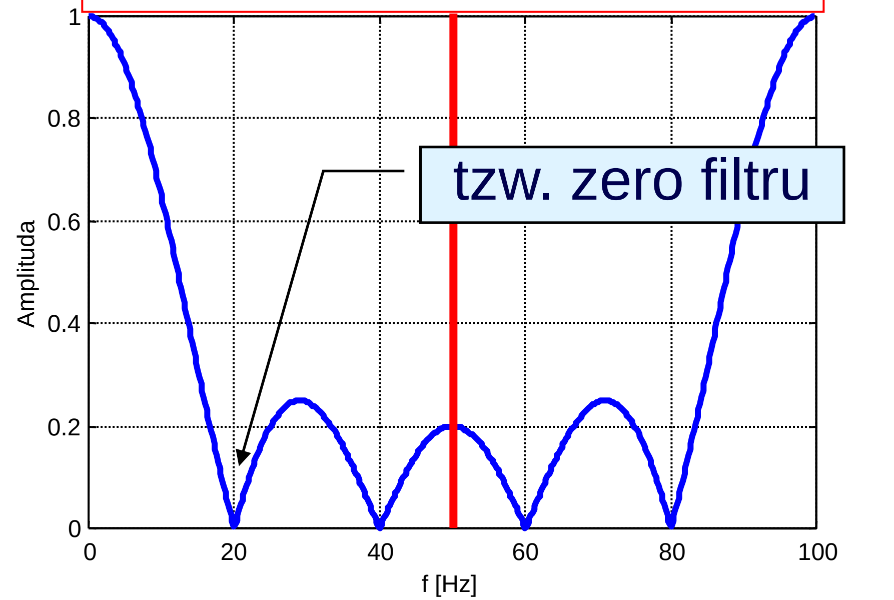
Wniosek: dla filtru SOI **współczynniki filtru** i jego **odpowiedź impulsowa** to jest to samo!

Prosty przykład filtru SOI

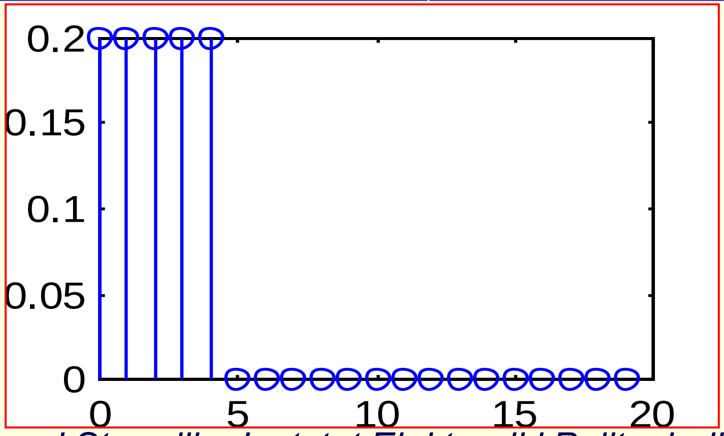
Charakterystyka fazowa



Charakterystyka amplitudowa



Odpowiedź impulsowa filtru



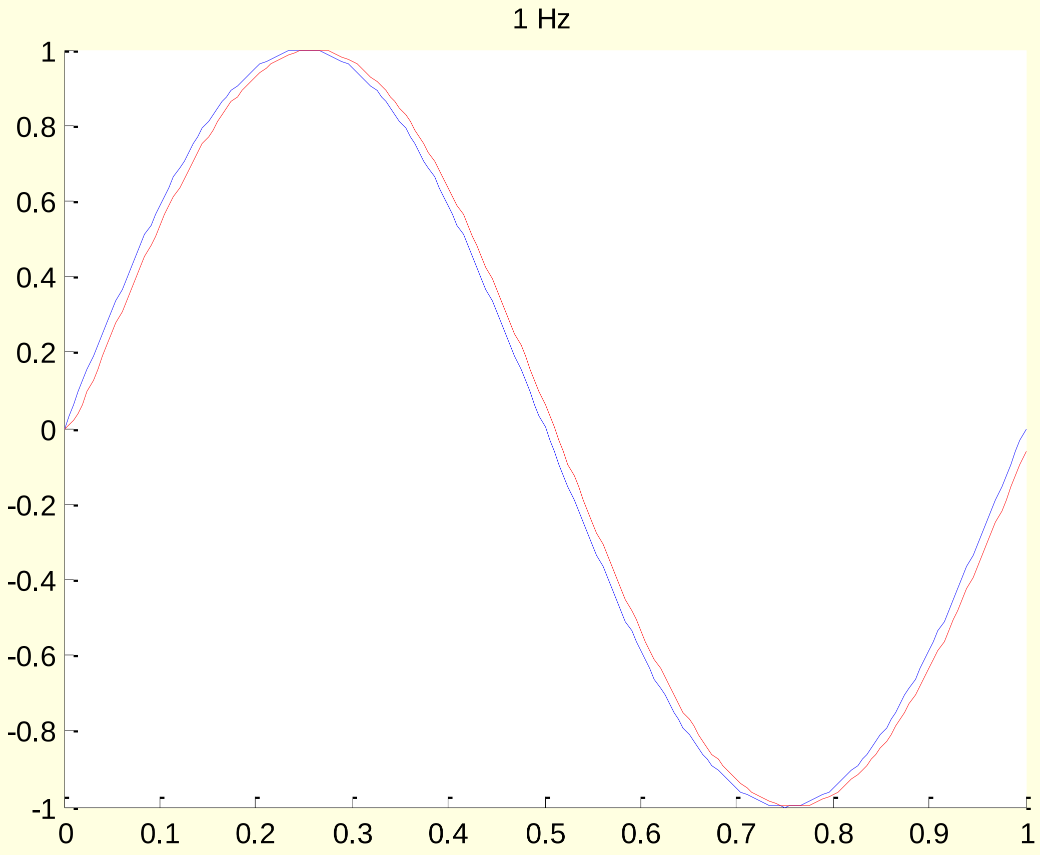
Prosty przykład filtru SOI

Ćwiczenie:

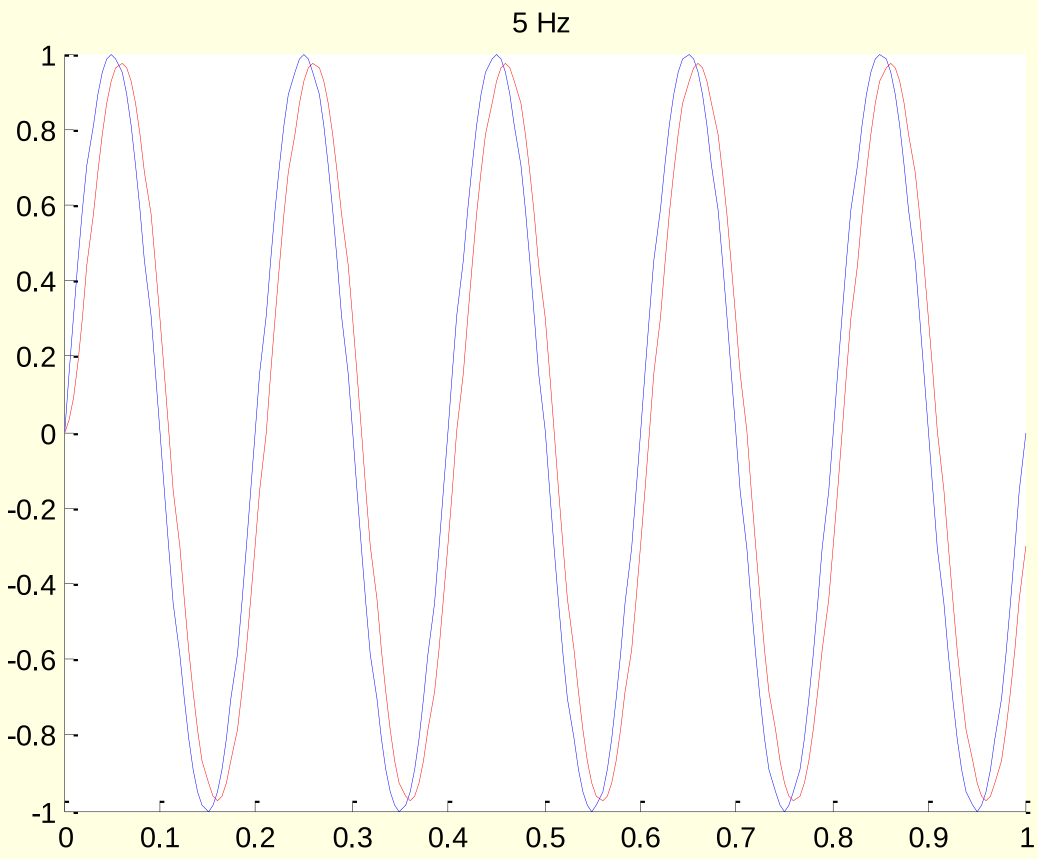
Zbadaj amplitudy i przesunięcia fazowe przebiegów wyjściowych filtru gdy na jego wejście podano:

- przebieg sinusoidalny f=1 Hz
- przebieg sinusoidalny f=5 Hz
- przebieg sinusoidalny f=20 Hz

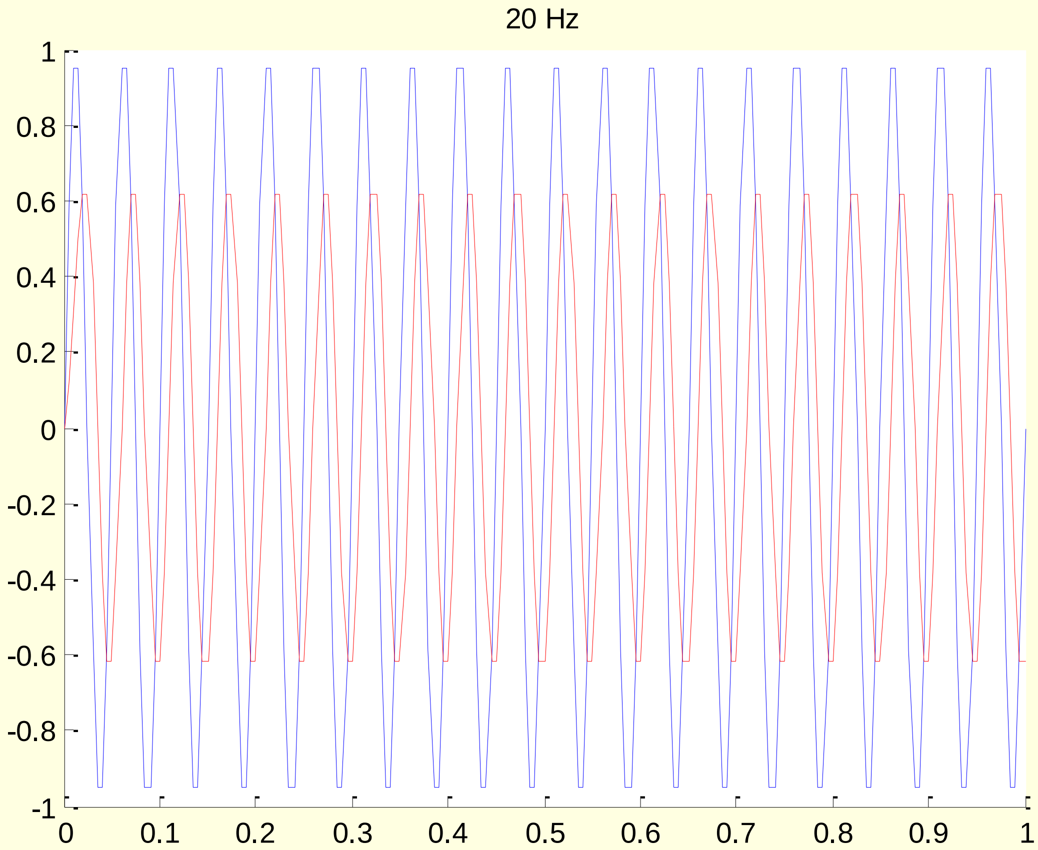
Prosty przykład filtru SOI



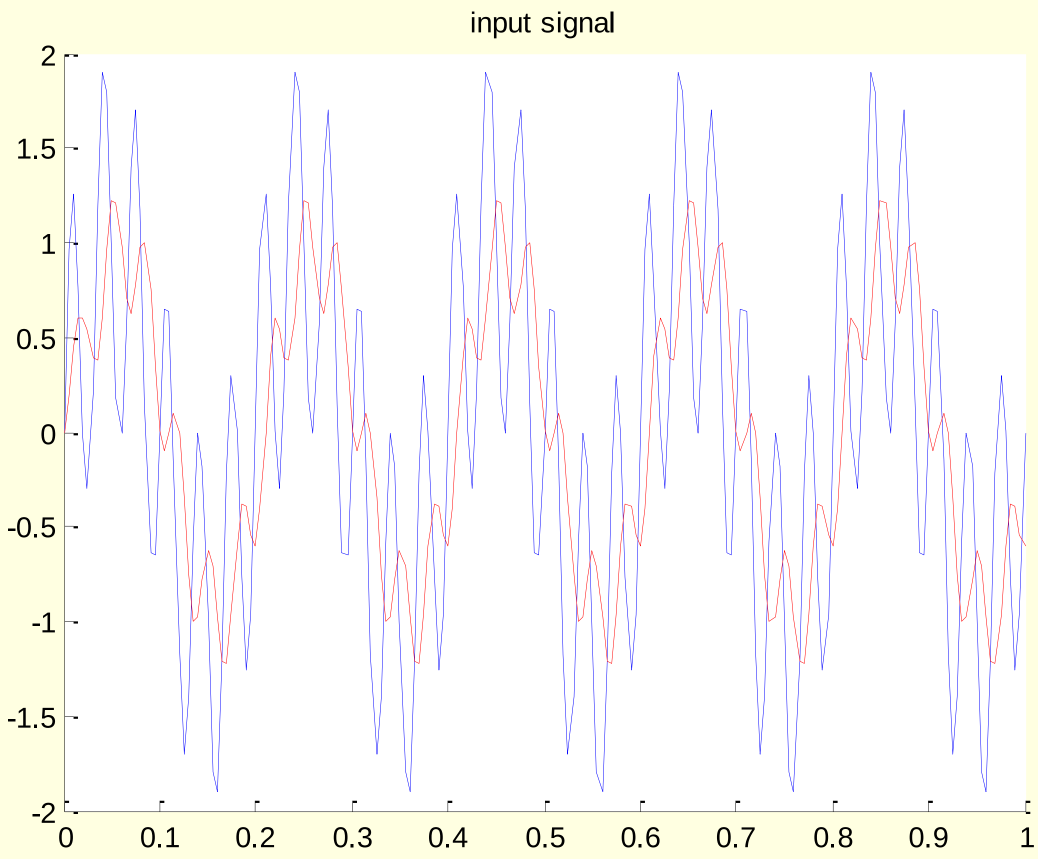
Prosty przykład filtru SOI



Prosty przykład filtru SOI



Prosty przykład filtru SOI



Warunek liniowej fazy dla filtrów SOI

Można projektować filtry SOI tak by zachować liniową charakterystykę fazową. Zapewniają to warunki symetrii dla współczynników filtru:

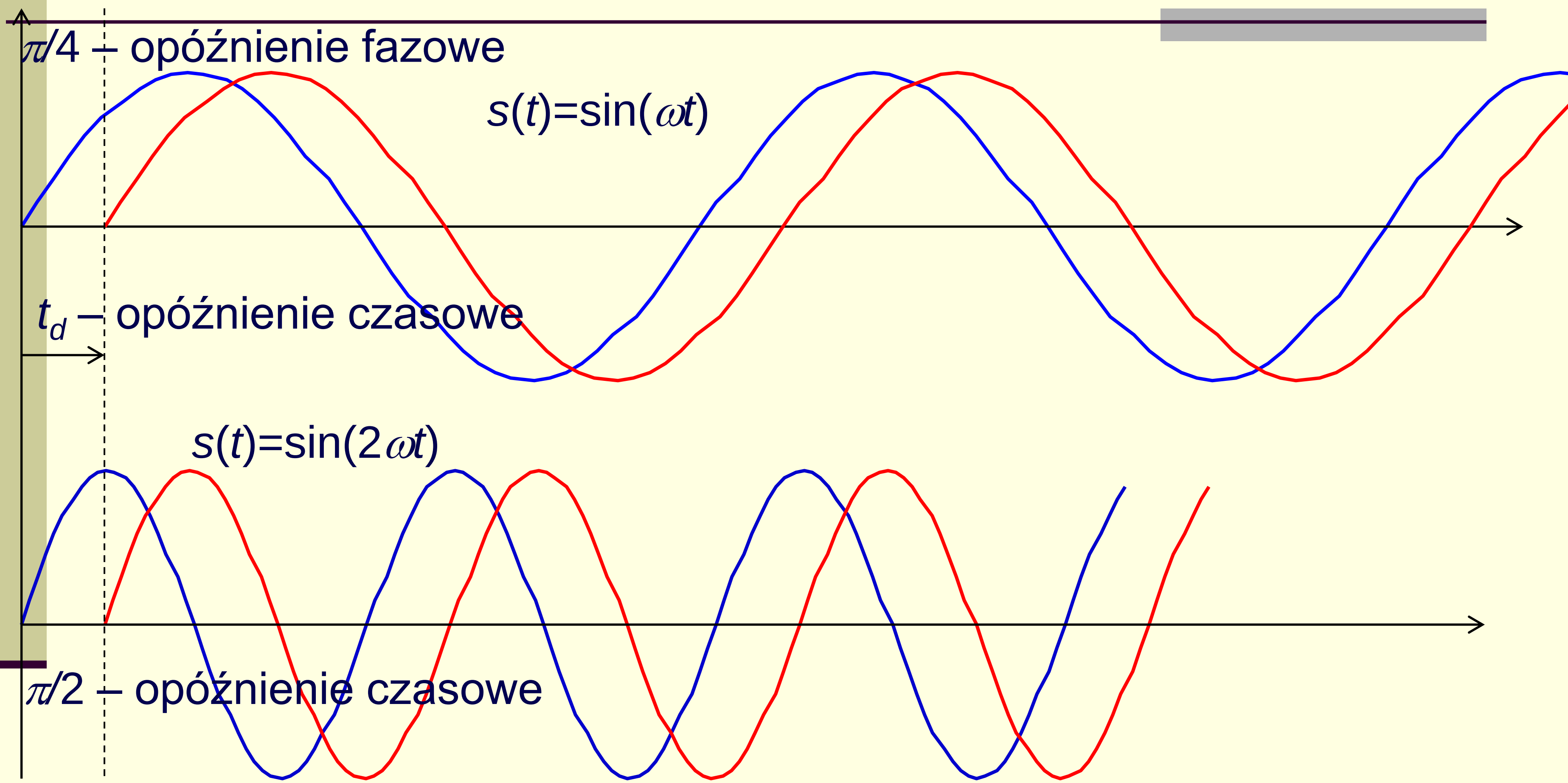
$\boxed{h(M-k) = h(k)}$ dla $k = 0,1,\ldots,M$

$\boxed{h(M-k) = -h(k)}$ dla M parzystych lub nieparzystych

Jaka jest korzyść z liniowej fazy filtru?

! Opóźnienie sygnału na wyjściu filtru jest niezależne od jego częstotliwości.

Filtr o liniowej fazie



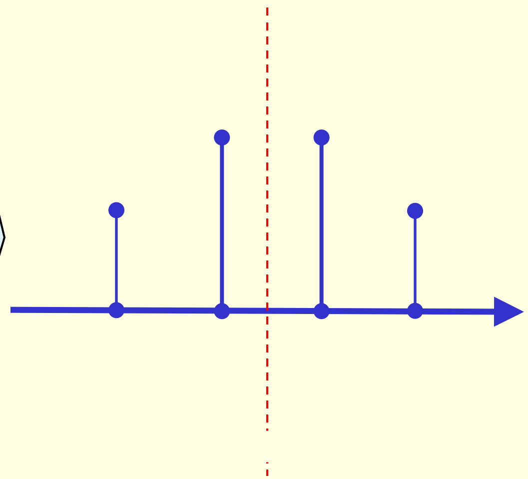
Filtry o liniowej fazie opóźniają wszystkie częstotliwości o ten sam czas!

Warunek liniowej fazy dla filtrów SOI

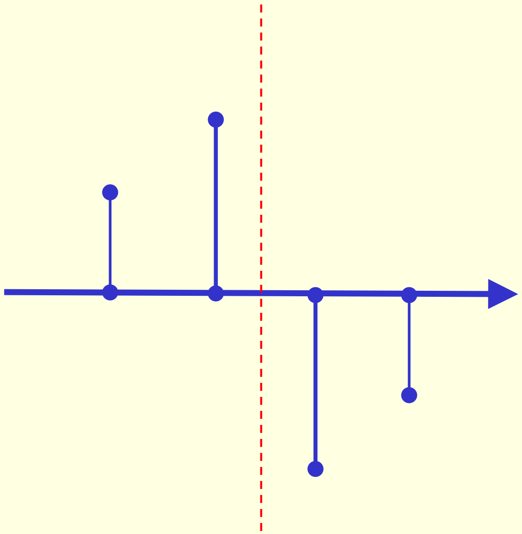
$$\boxed{h(M-k)=h(k)}$$

dla $k=0,1,\ldots,M$

$$\boxed{h(M-k)=-h(k)}$$



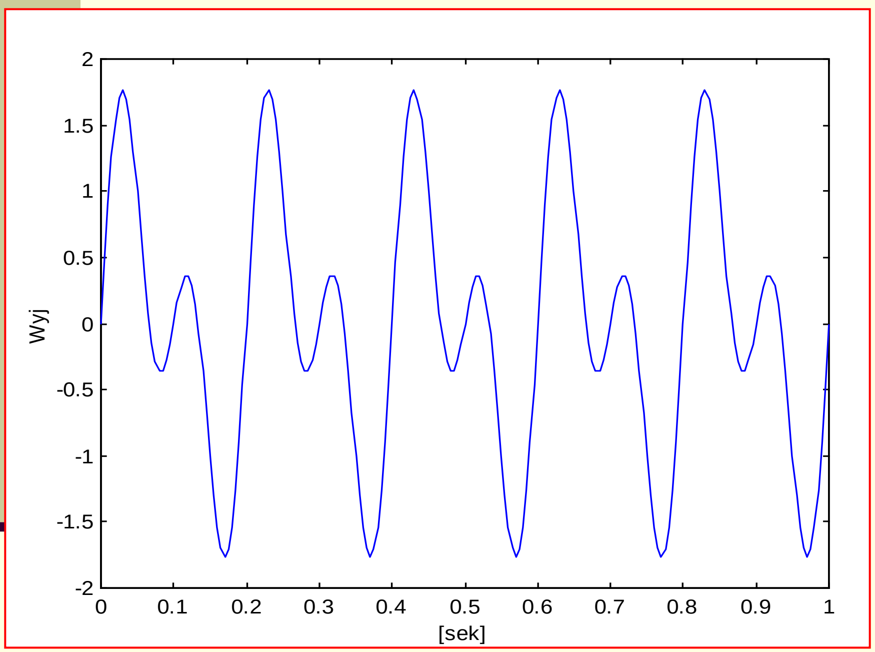
czas dyskretny

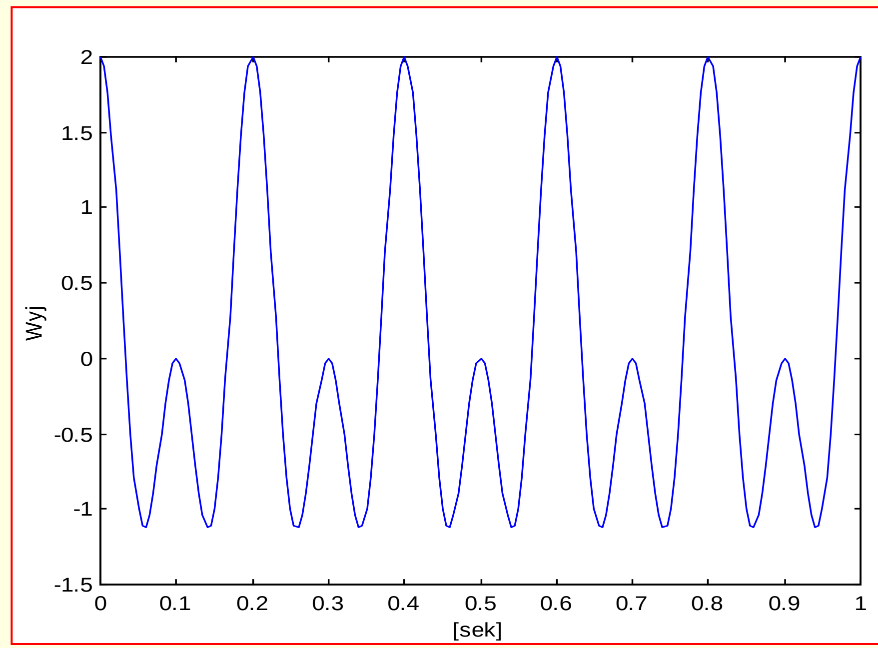


czas dyskretny

Zniekształcenia fazowe

$$x_{we} = \sin(10\pi t) + \sin(20\pi t) \qquad x_{wy} = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

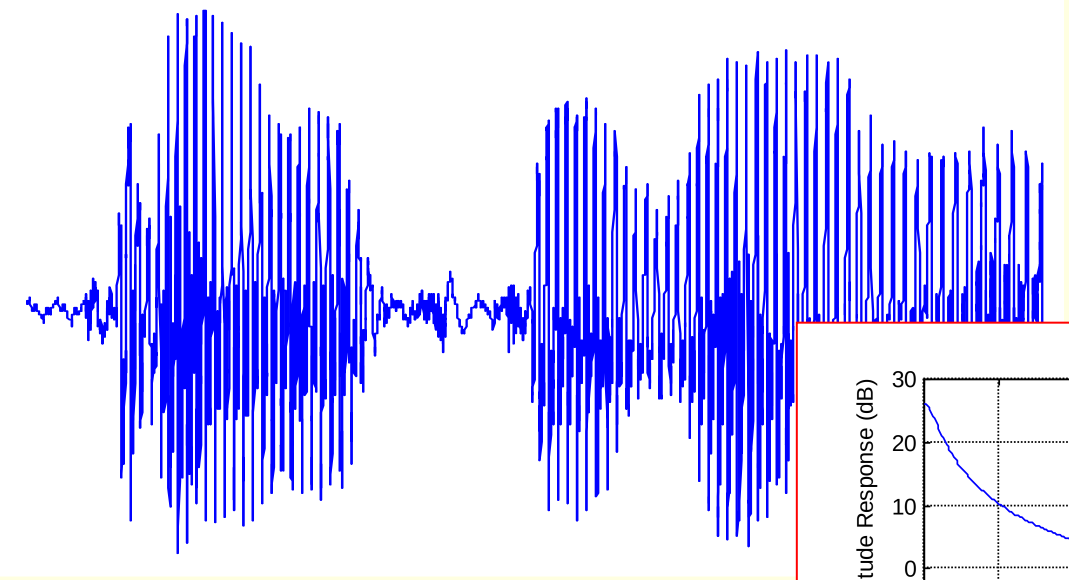


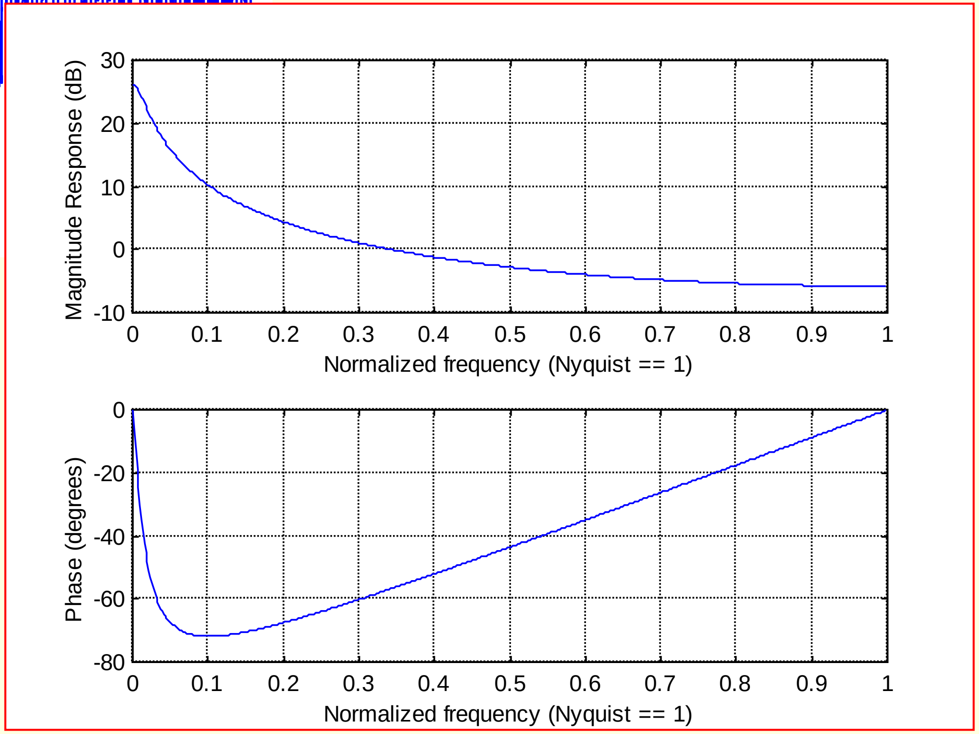


tzw. nieliniowe zniekształcenia fazowe

(np. duże zniekształcenia sygnałów akustycznych)

Zniekształcenia fazowe - przykład





Inne przykłady filtrów SOI

Ćwiczenie cd:

Zbadaj charakterystyki filtrów o odpowiedzi impulsowej:

- h=0.25*[1 2 1] , tzw. filtr von Hanna (tzw. filtr Gaussa)
- h=[1 -2 1] , ~ druga pochodna sygnału

Projektowanie filtrów

Examples

Low-pass from 0 to f:

```
>>> firwin(numtaps, f)
```

Use a specific window function:

```
>>> firwin(numtaps, f, window='nuttall')
```

High-pass ('stop' from 0 to f):

```
>>> firwin(numtaps, f, pass_zero=False)
```

Band-pass:

```
>>> firwin(numtaps, [f1, f2], pass_zero=False)
```

Band-stop:

```
>>> firwin(numtaps, [f1, f2])
```

from scipy.signal import firwin

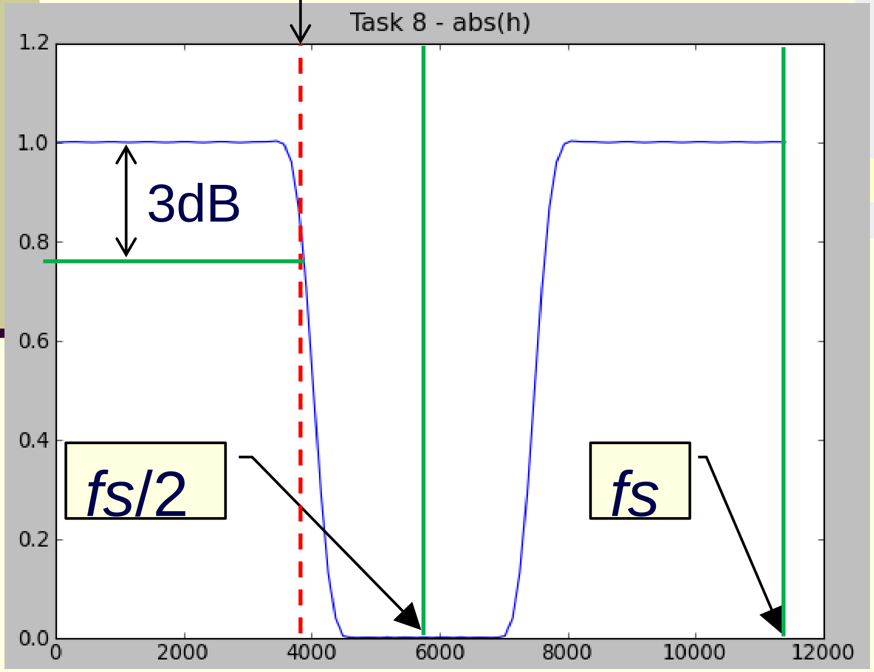
Gdzie *f* jest tzw. częstoli-
wością znormalizowaną
f=<0,1>, przy czym
1 odowiada *fs*/2

Projektowanie filtrów SOI

M=40 rząd filtru

f_{off}=0.7*fs/2

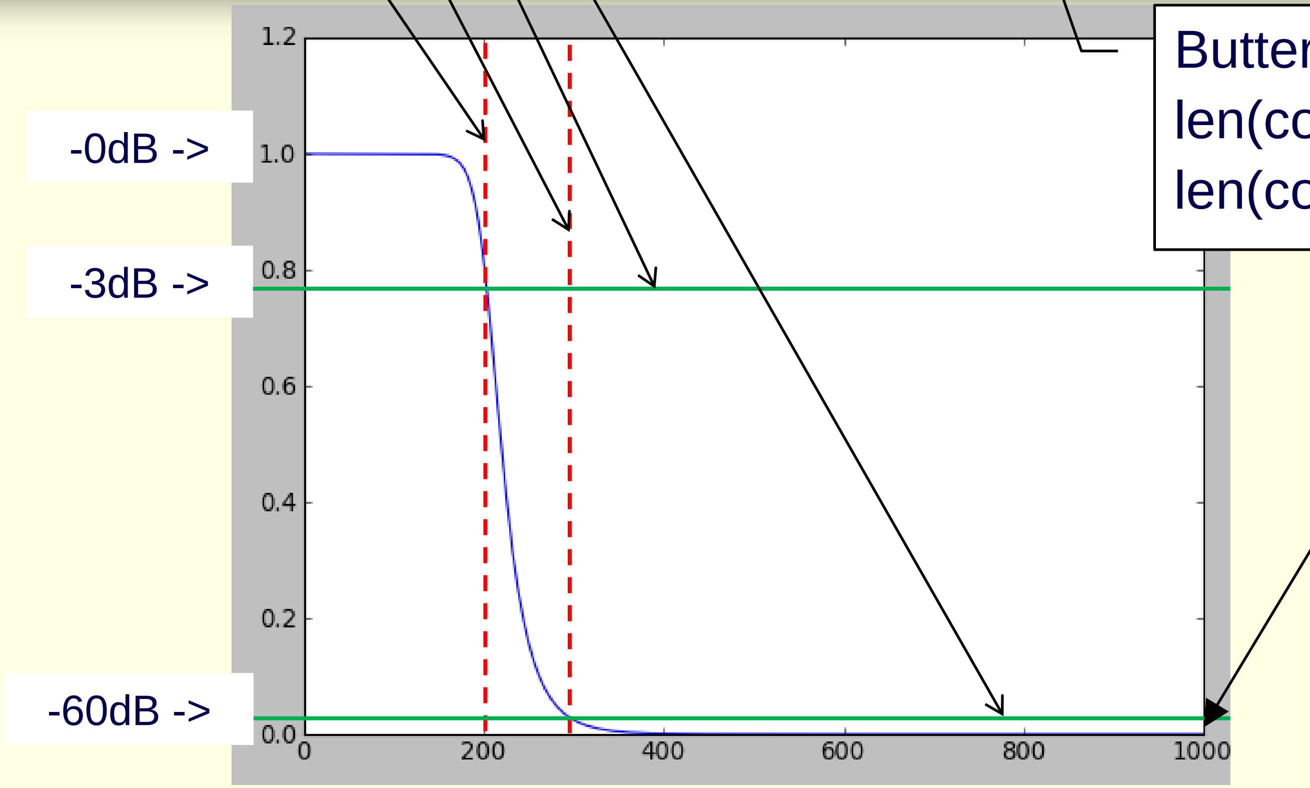
```python
from pylab import figure,plot, show
from numpy import arange
from scipy.signal import firwin, freqz
b=firwin(40,0.7)
N=100
fs=1140
w,h=freqz(b,1,N, whole='True')
f=arange(0,fs,1.0*fs/N)
figure()
plot(f,abs(h))
show()
```



Projektowanie filtrów NOI

```
from scipy.signal import firwin, iirdesign
coeff=iirdesign(0.2,0.3,3,60,analog=0,ftype='butter',output='ba')
w,h=freqz(coeff[0],coeff[1])
plot(abs(h))
```

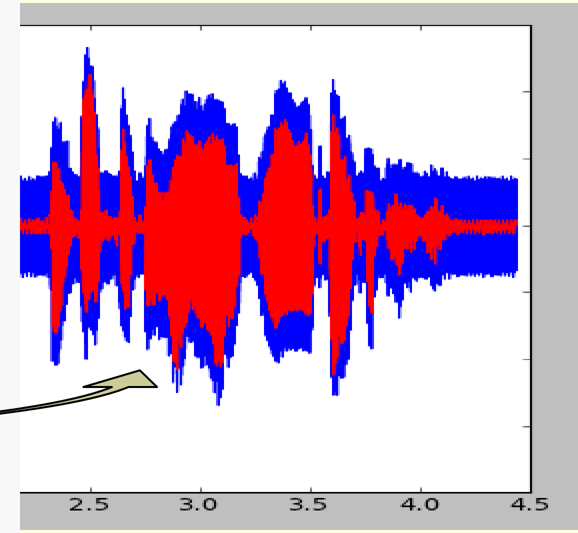
Butterworth filter
len(coeff[0])=16
len(coeff[1])=17



Zastosowanie filtru

```
from scipy.io.wavfile import read as read_wav
from numpy import array, arange
from pylab import show, plot, title, figure
from scipy.signal import lfilter, freqz, convolve, firwin

fs, audio = read_wav('noise_voice.wav')

fs=11400
N=50580
T=float(N)/fs #time period definition
t=arange(0,T,1.0/fs)

figure(1)
plot(t,audio) #plot the noisy audio signal


b=firwin(40,0.7) #coefficients of the low-pass FIR filter

y = lfilter(b,[1],audio) # filtering of the audio signal


plot(t,y,'r')     #plot the filtered audio signal
show()
```

a[0]=1

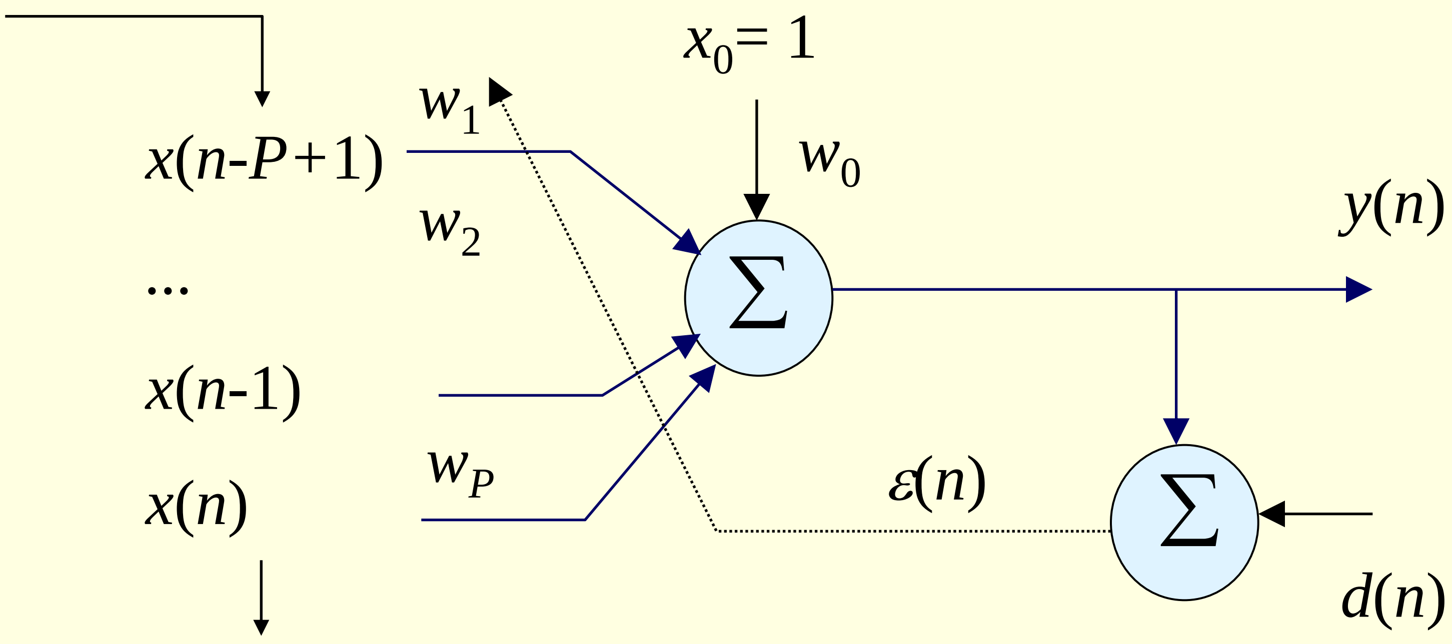


Porównanie filtrów SOI i NOI

SOI	NOI
z definicji stabilne	mogą być niestabilne
łatwe projektowanie	bardziej złożone projektowanie
łatwo zapewnić liniową fazę	nieliniowa faza
uzyskanie stromej charakterystyki jest możliwe dla dużego rzędu filtru	możliwość uzyskiwania bardzo stromej charakterystyki
skończoną dokładność reprezentacji współczynników filtru nie jest dokuczliwa	problemy implementacyjne z uwagi na skończoną dokładność reprezentacji współczynników filtru

Idea filtru adaptacyjnego

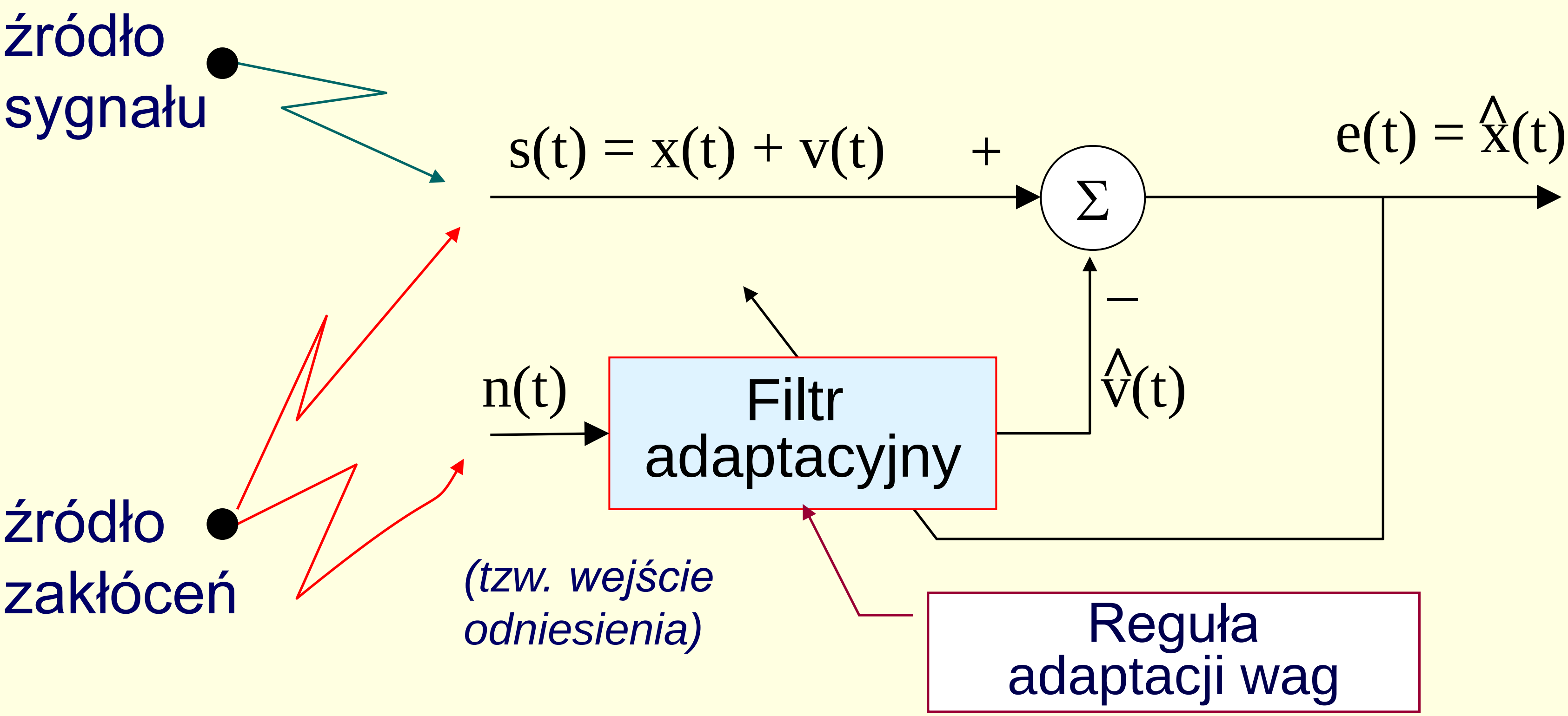
kolejne próbki sygnału



Funkcja celu:

$$E[d(n) - \mathbf{w}^T\mathbf{x}] = [(d(n) - y(n))^2] = E[\varepsilon^2] \rightarrow min$$

Adaptacyjna redukcja zakłóceń



$$\Delta w(t) = -\eta \nabla e(t)$$

Adaptacyjna redukcja zakłóceń

Minimum wielkości *e*(*t*) odpowiada najskuteczniejszej (zgodnie z minimum błędu średniokwadratowego) redukcji zakłóceń:

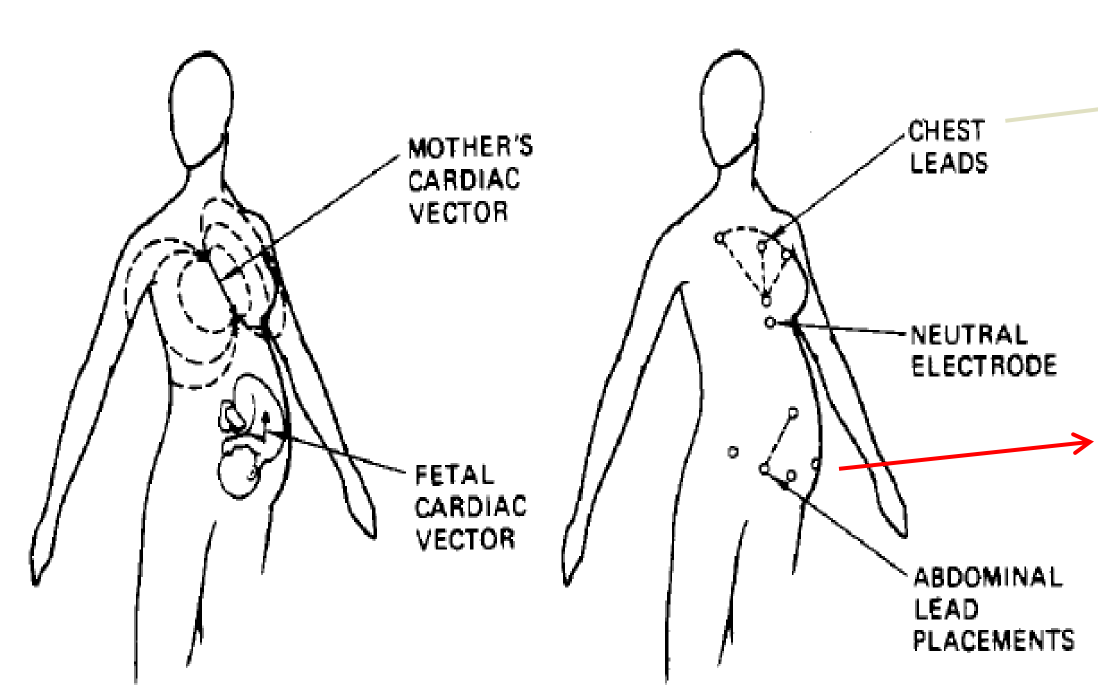
$$e(t) = s(t) - \hat{v}(t) = x(t) + v(t) - \hat{v}(t)$$

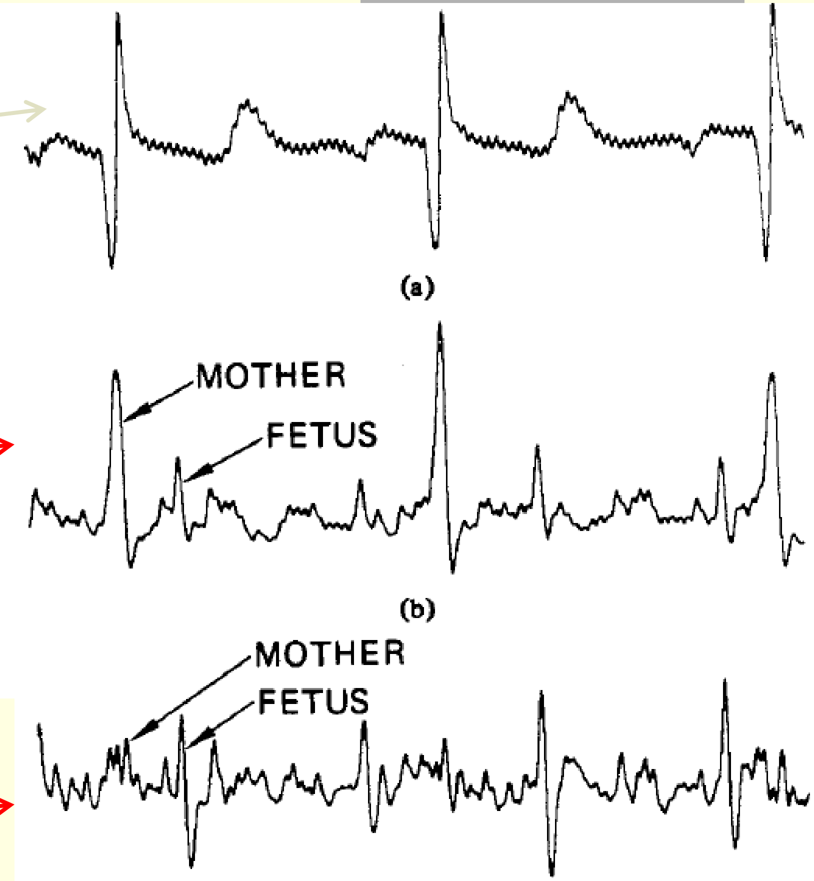
$$E[e^2] = E[x^2] + \underbrace{2E[x(v-\hat{v})]}_{=\varnothing} + \underbrace{E[(v-\hat{v})^2]}_{\to\varnothing} \approx E[x^2]$$

c.n.d.

sygnał i zakłócenie są nieskorelowane

Adaptacyjna redukcja zakłóceń





Po usunięciu EKG matki

Źródło: Widrow, B. ; Glover, J.R., Jr. ; McCool, J.M. ; Kaunitz, J. ;Williams, C.S. ; Hearn, R.H. ; Zeidler, J.R. ; Eugene Dong, Jr. ;Goodlin, R.C., **Adaptive noise cancelling: Principles and applications**, Proceedings of the IEEE vol: 63 ,no: 12, 1975

Zastosowania filtracji adaptacyjnej

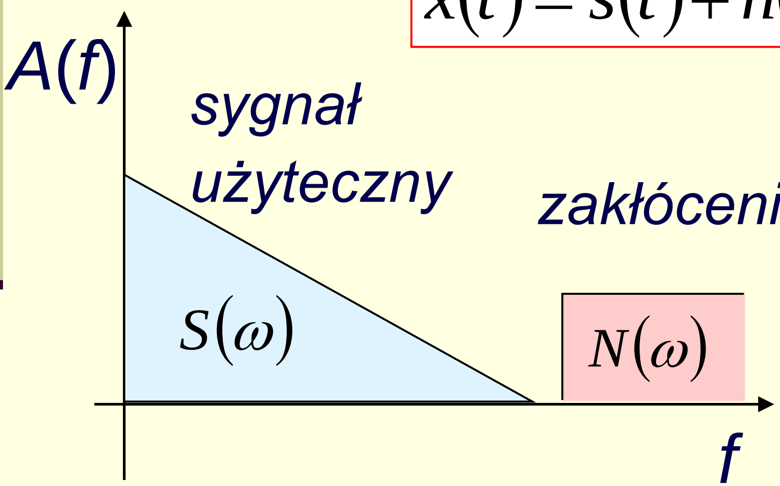
Filtry adaptacyjne są stosowane głównie do filtracji sygnałów niestacjonarnych, np.:

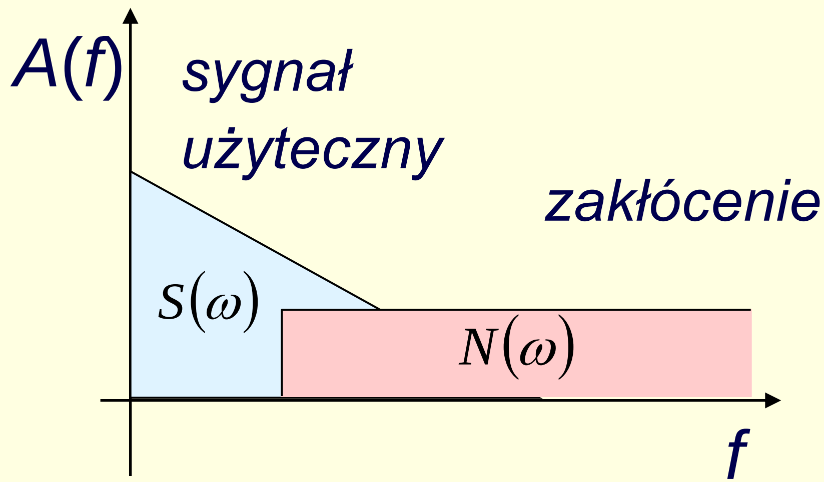
- w adaptacyjnej redukcji zakłóceń mierzonego sygnału od sieci energetycznej oraz redukcji zakłóceń od elektronarzędzi chirurgicznych (f~120 Hz)
- do redukcji energii sygnału EKG matki przy pomiarze EKG płodu
- jako model predykcyjny sygnałów biologicznych do wykrywania ich zaburzeń (np. detekcji stanu fibrylacji komór serca → implantowane defibrylatory)

Uśrednianie synchroniczne sygnału

Filtry dolnoprzepustowe nie są skuteczne przy wygładzaniu sygnałów, w których pasmo zakłóceń pokrywa się z pasmem składowych użytecznych sygnału

$$\boxed{x(t) = s(t) + n(t)}$$



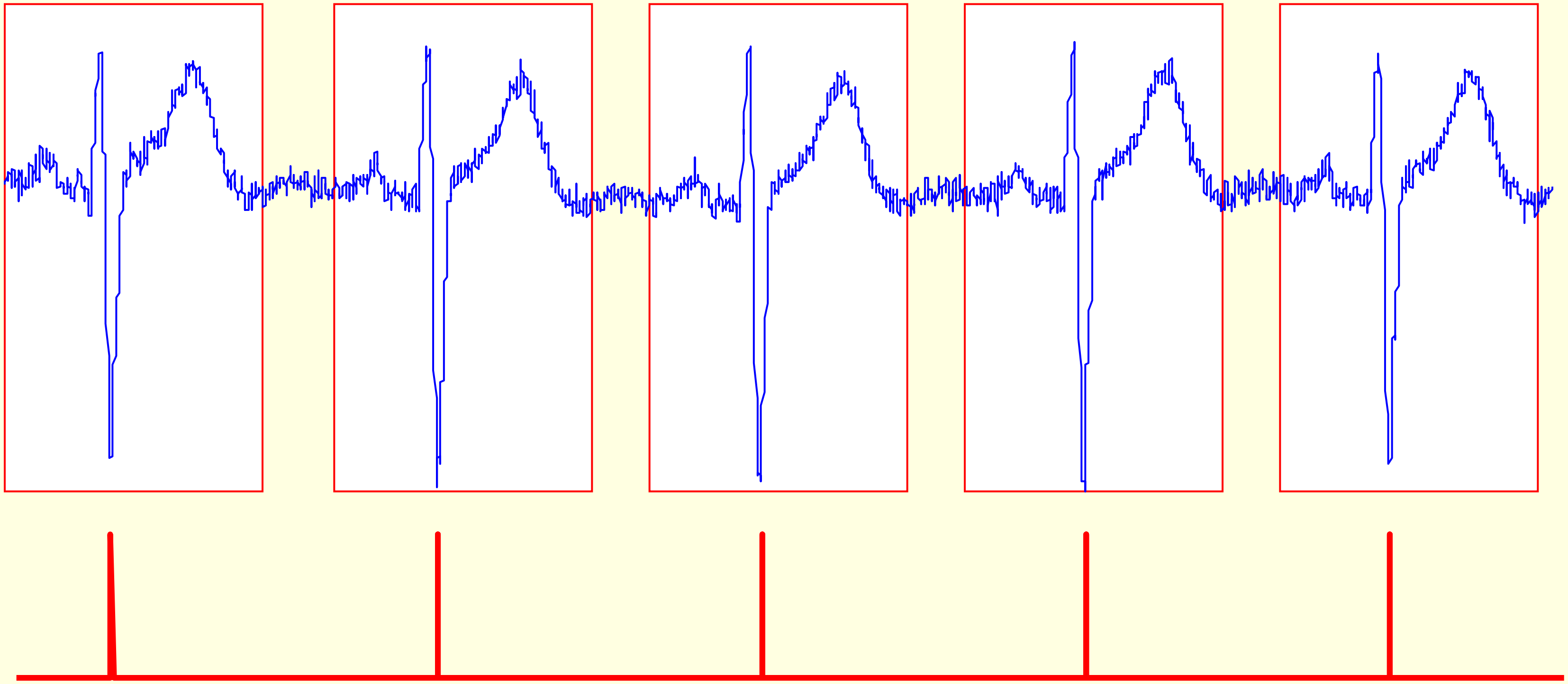


Widma częstotliwościowe sygnału i zakłócenia

Paweł Strumiłło, Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Uśrednianie synchroniczne sygnału

Idea uśredniania synchronicznego



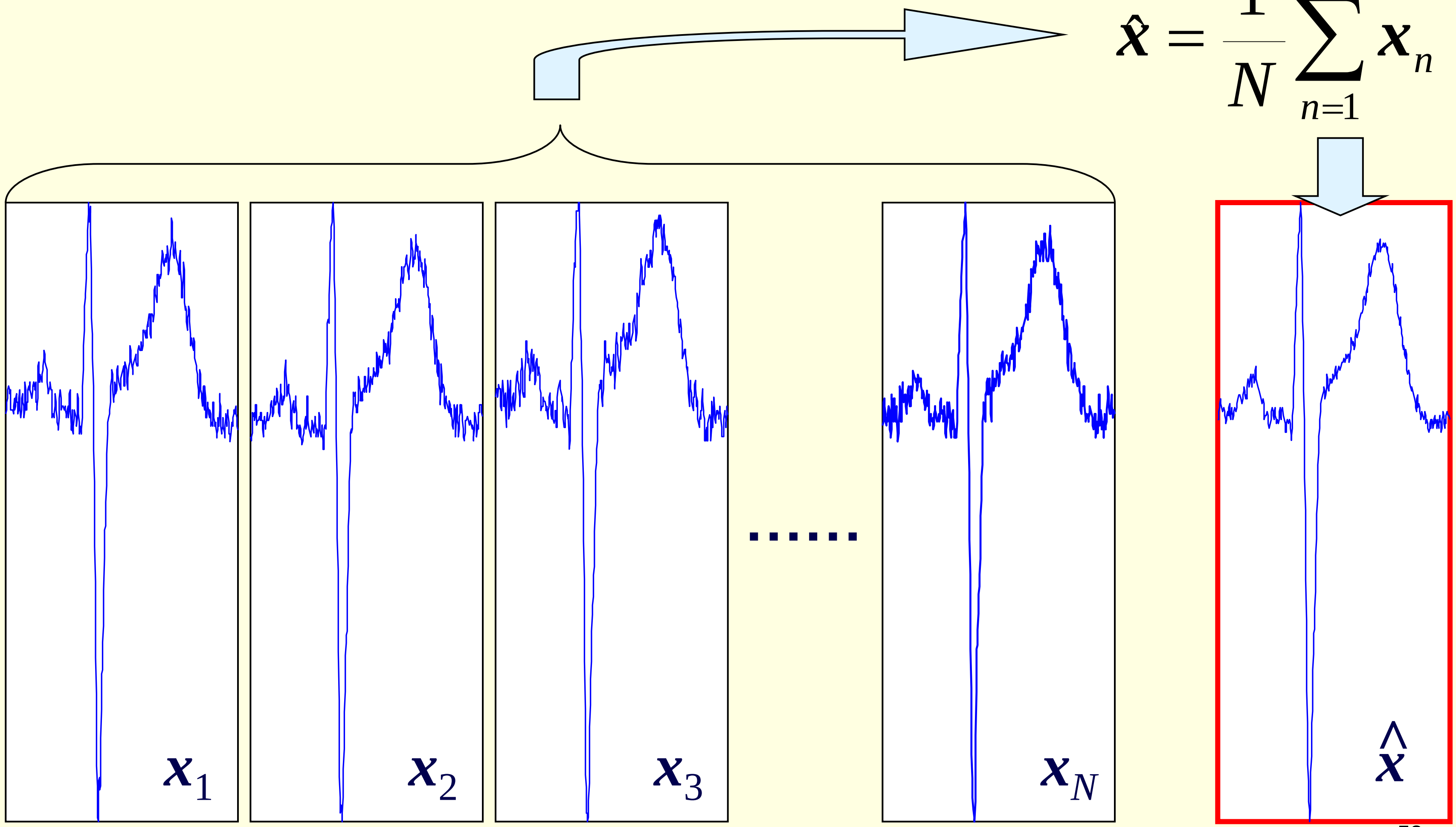
Uśrednianie synchroniczne sygnału

Uśrednianie synchroniczne sygnału jest skuteczne przy spełnieniu następujących warunków:

- składowe deterministyczne sygnału powinny występować okresowo (niekoniecznie w regularnych odstępach)
- sygnał zakłócający powinien być sygnałem **losowym, nieskorelowanym** ze składowymi deterministycznymi sygnału
- powinna istnieć możliwość detekcji cech sygnału potrzebnych do synchronizacji kolejnych jego cykli

Uśrednianie synchroniczne sygnału

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_n$$



Uśrednianie synchroniczne sygnału

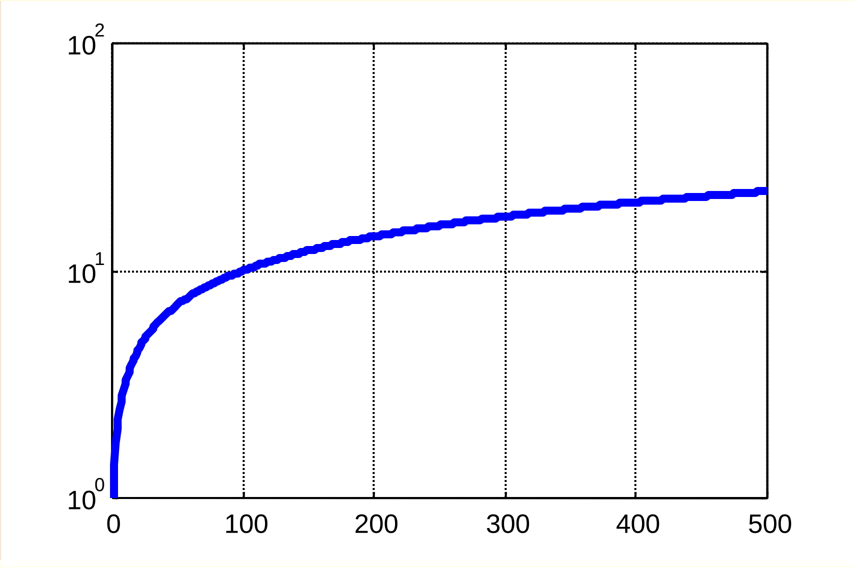
Odchylenie standardowe sygnału: σ_s

Odchylenie standardowe zakłócenia: σ_n

Stosunek sygnału do zakłócenia: $SNR = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_n}$

Po *N* uśrednieniach:

$$\boxed{SNR_N = \sqrt{N}\,\frac{\sigma_s}{\sigma_n}}$$



Zatem poprawa SNR po *N* uśrednieniach wynosi: $\boxed{\sqrt{N}}$

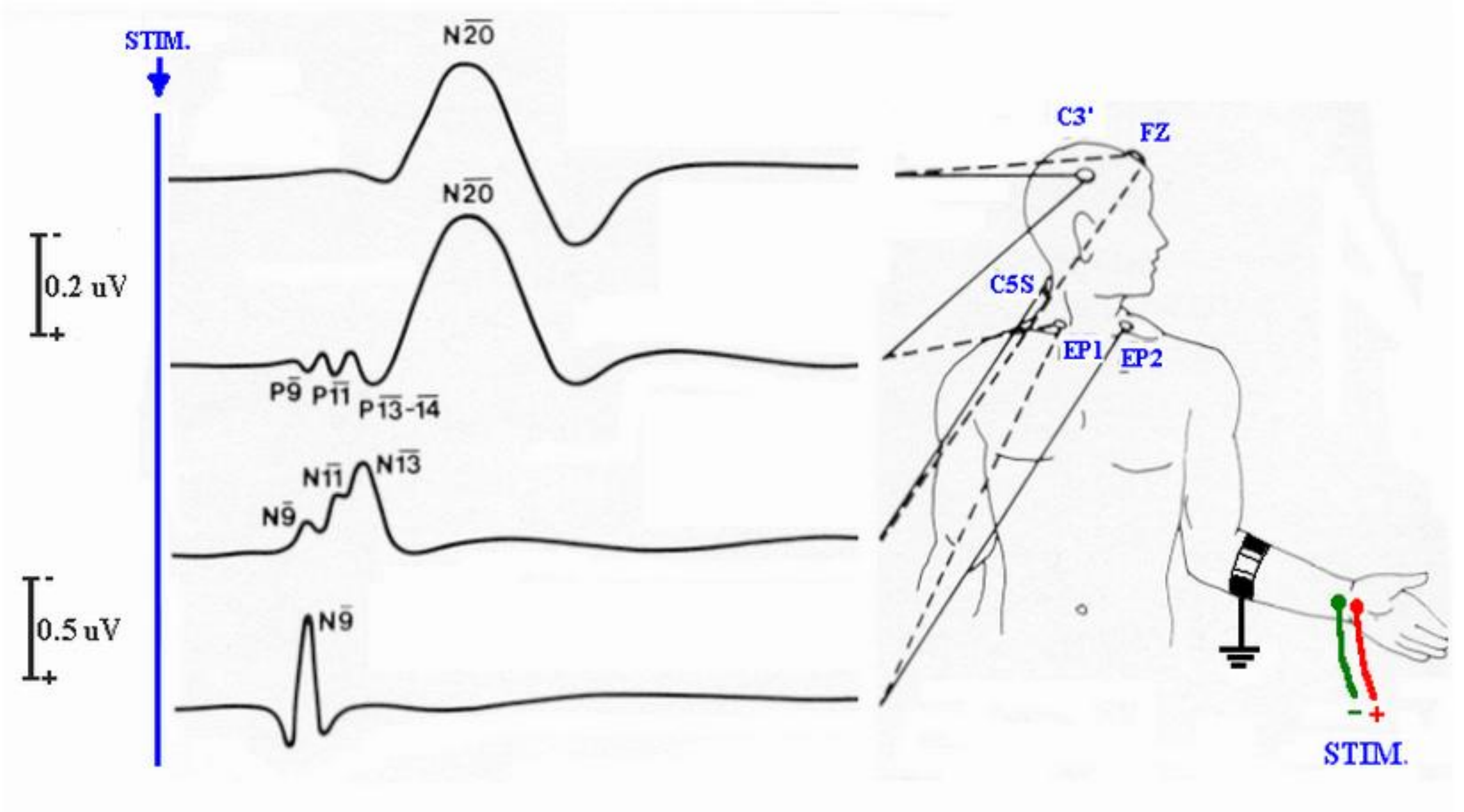
Uśrednianie synchroniczne sygnału

Zastosowania:

- detekcja podszumowa sygnału tj. dla $\sigma_s << \sigma_n$ (zastosowania w telekomunikacji)

- analiza elektrycznych potencjałów wywołanych mózgu, tj. potencjałów generowanych w mózgu o amplitudzie **kilku mikrowoltów** na skutek okresowego pobudzenia bodźcem: świetlnym (potencjały **wzrokowe**), dźwiękowym (potencjały **słuchowe**) lub dotykowym (potencjały **czuciowe**)

Czuciowe potencjały wywołane



M. F. El-Bab, COGNITIVE EVENT RELATED POTENTIALS DURING A LEARNING TASK, PhD, University of Southampton, UK.

Filtracja medianowa sygnałów

Mediana – element środkowy w ciągu uporządkowanych liczb, np.:

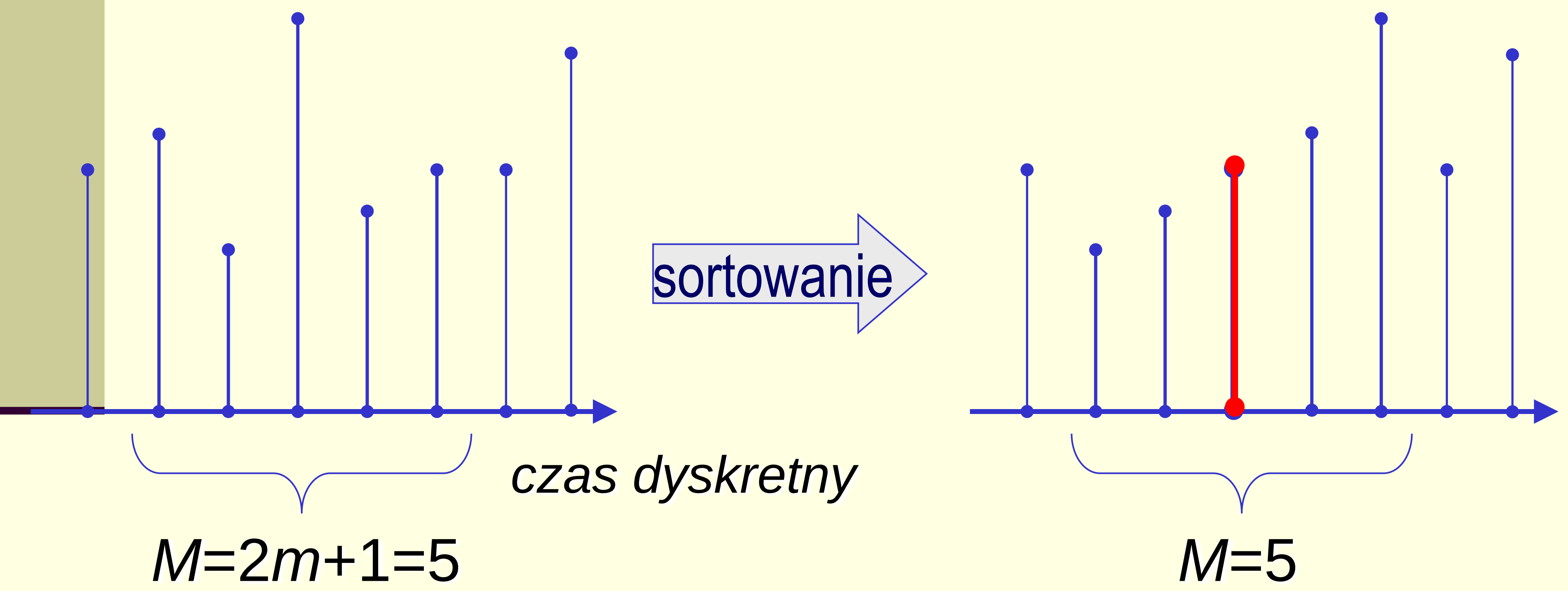
$$x(n)=\{1, 5, -7, 101, -25, 3, 0, 11, 7\}$$

Porządkowanie (sortowanie) ciągu:

$$x_s(n)=\{-25, -7, 0, 1, \mathbf{3}, 5, 7, 11, 101\}$$

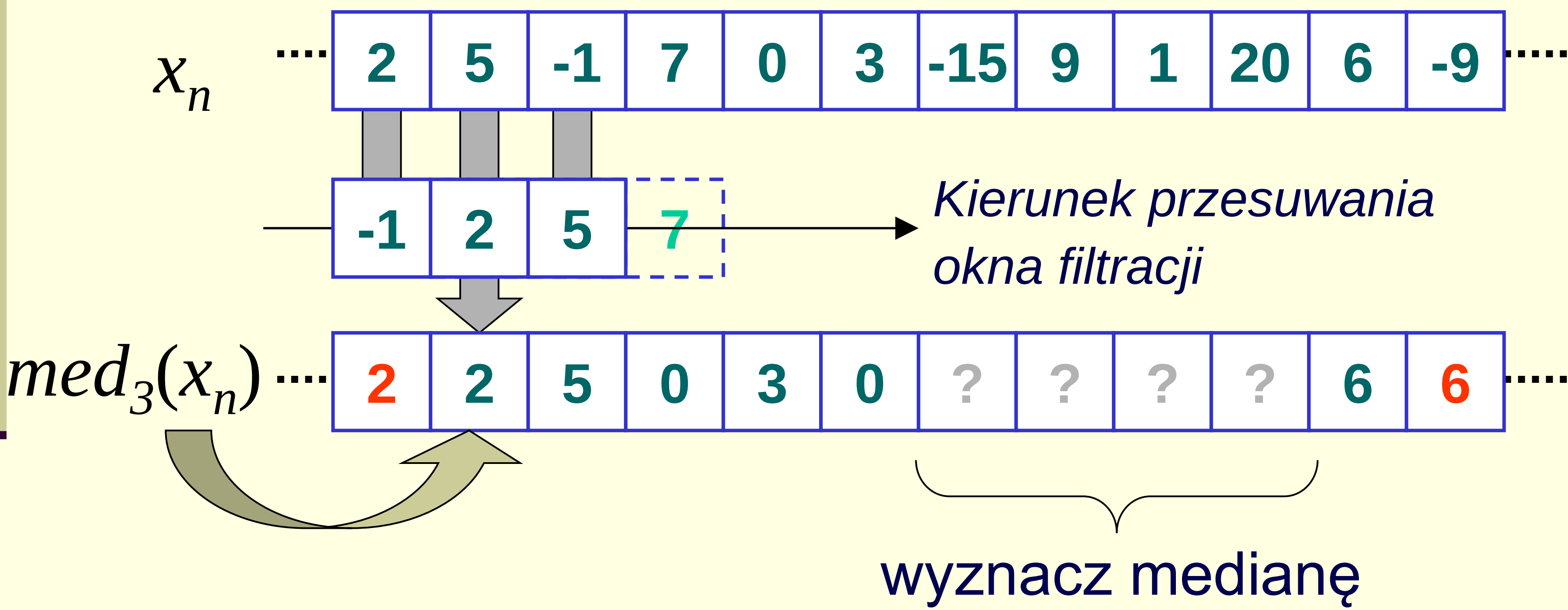
Element środkowy

Filtracja medianowa sygnałów

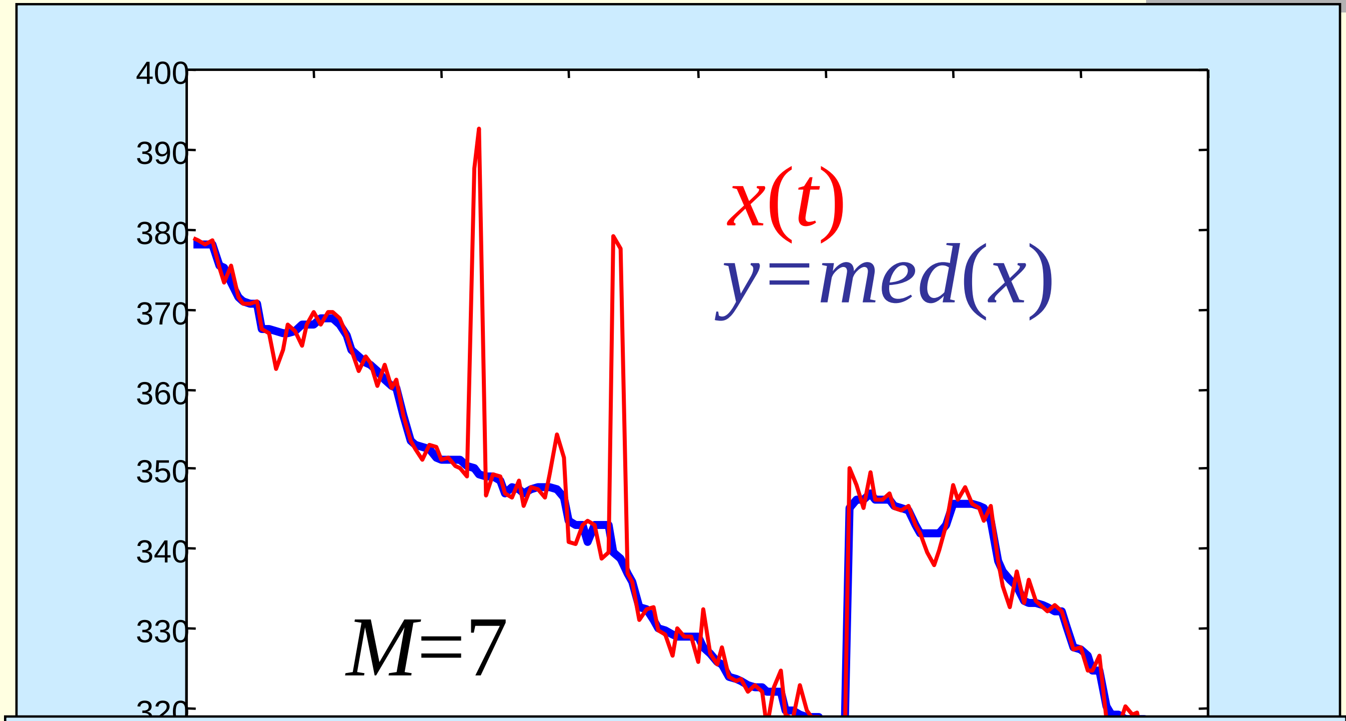


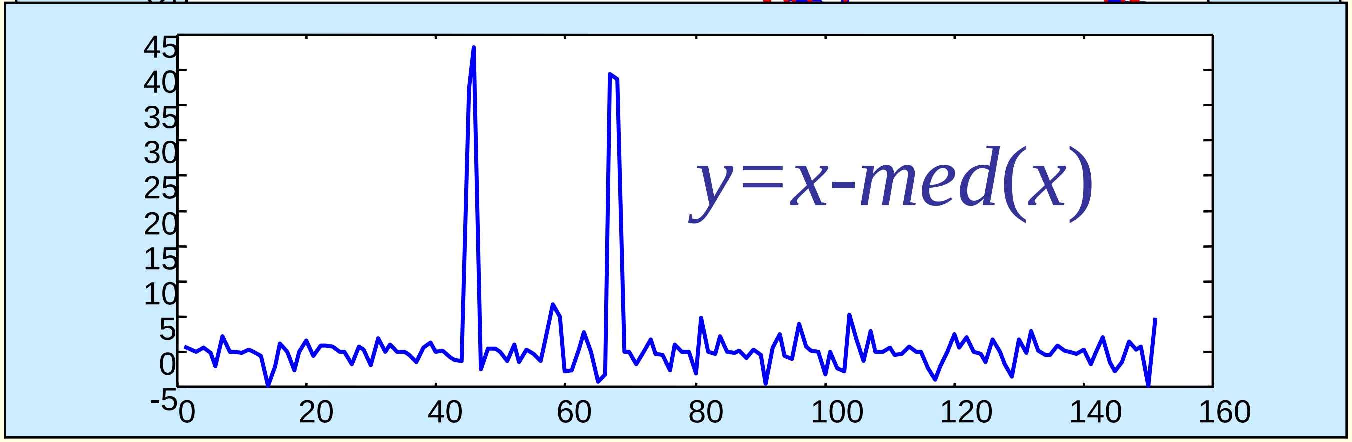
Filtracja medianowa sygnałów

Filtracja medianowa sygnału:



Filtracja medianowa -przykład





Filtracja cyfrowa - podsumowanie

1. Idea filtracji sygnału
2. Charakterystyka częstotliwościowa filtru
3. Rodzaje filtrów
4. Real filters
5. Równania różnicowe
6. Filtry SOI i NOI
7. Liniowa faza i zniekształcenia fazowe
8. Projektowanie filtrów i filtrowanie sygnału
9. Filtracja adaptacyjna
10. Filtracja medianowa ($\rightarrow$filtracja nieliniowa)