KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

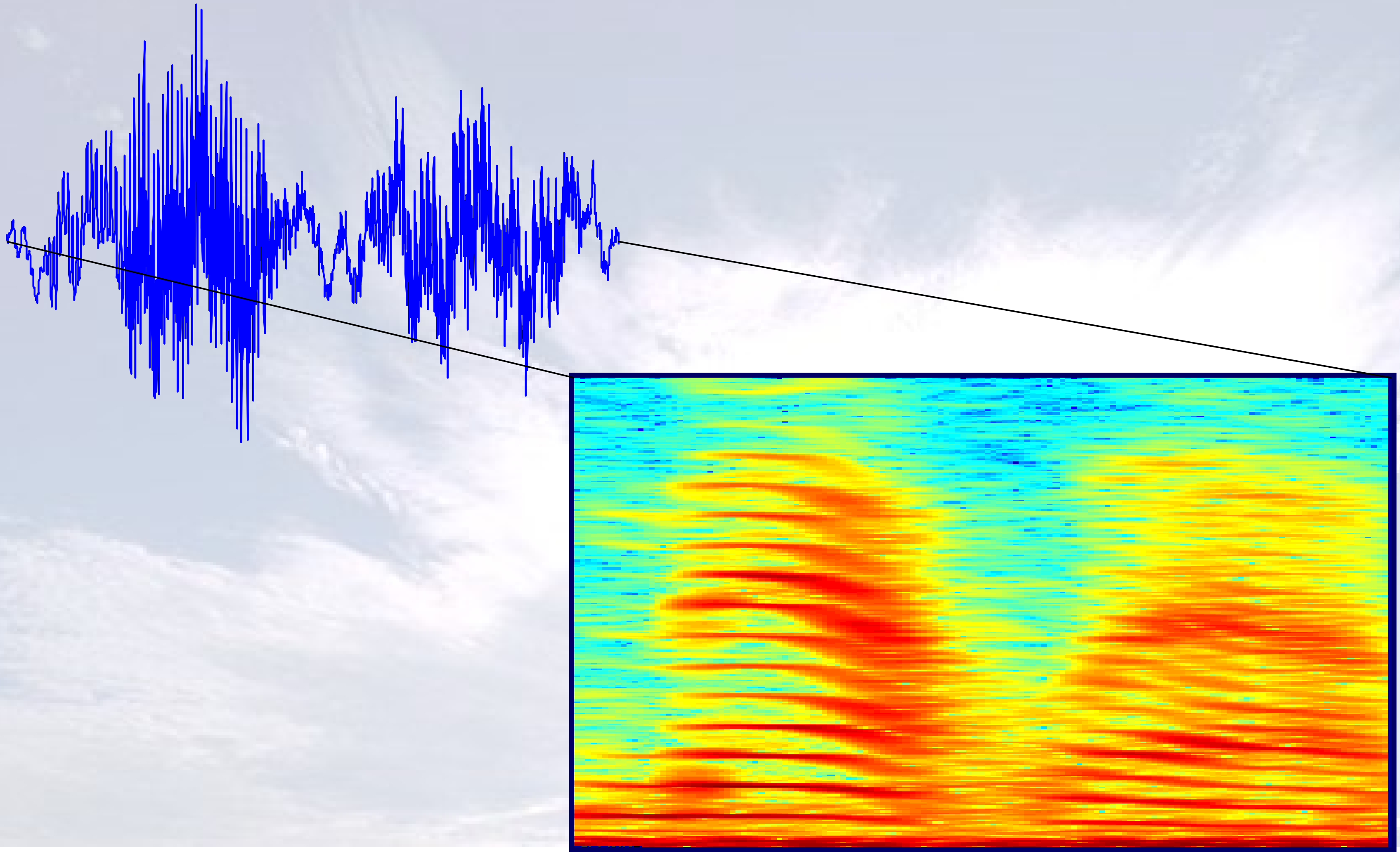
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

„SIGNAL PROCESSING”

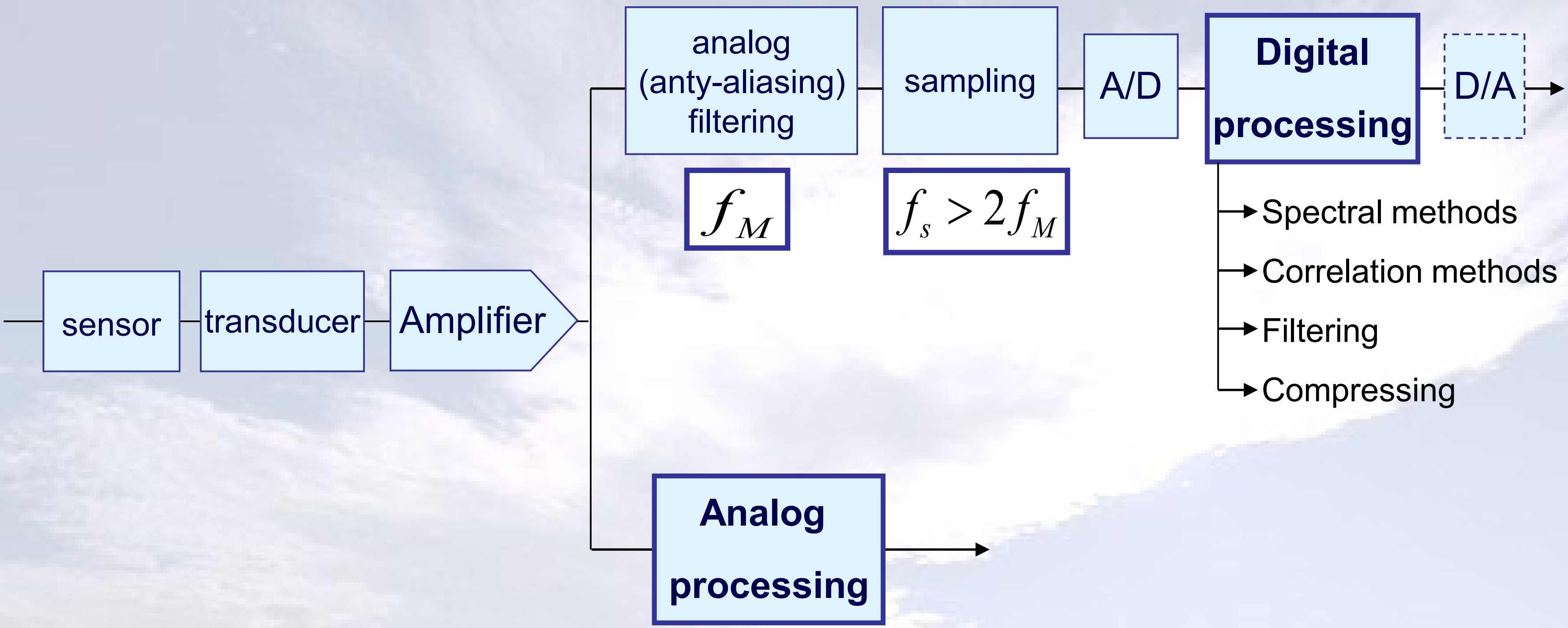
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego w projekcie pt.

„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń - zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej - zarządzanie Uczelnią, nowoczesna oferta edukacyjna i wzmacniania zdolności do zatrudniania osób niepełnosprawnych”

Spectral analysis

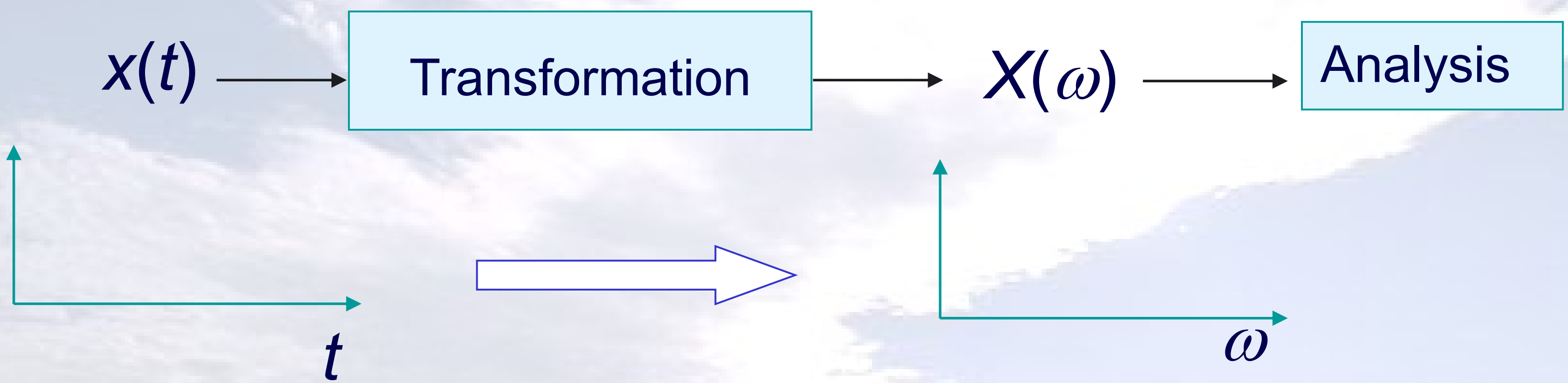


Signal processing



Spectral analysis

Analysis of signals in spectral domain enables observation of signal features that are not visible in time domain but have significant diagnostic meaning.

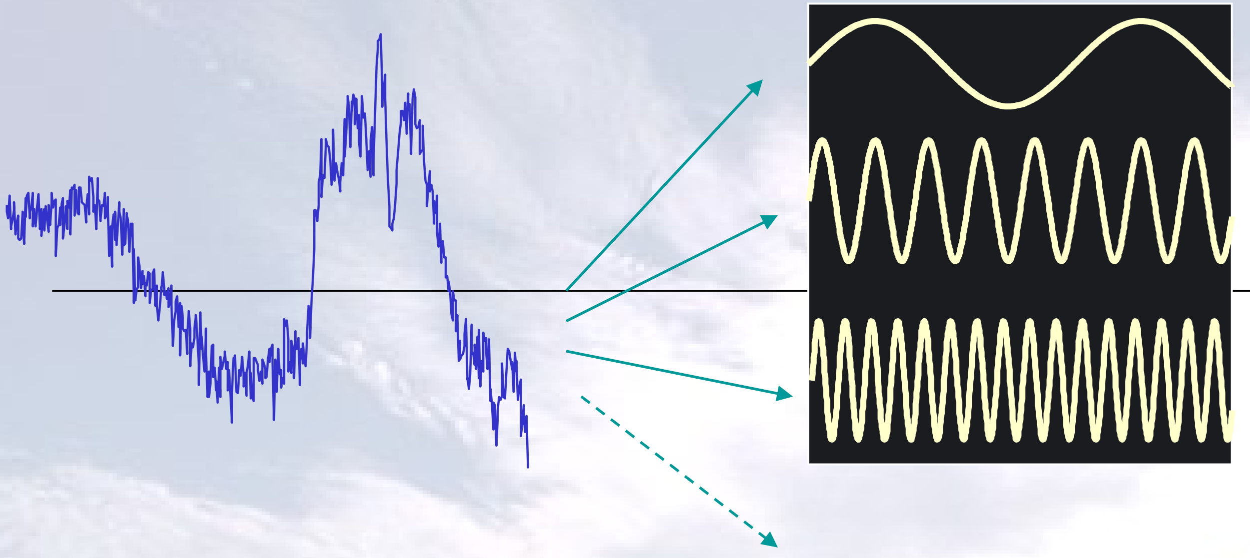


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

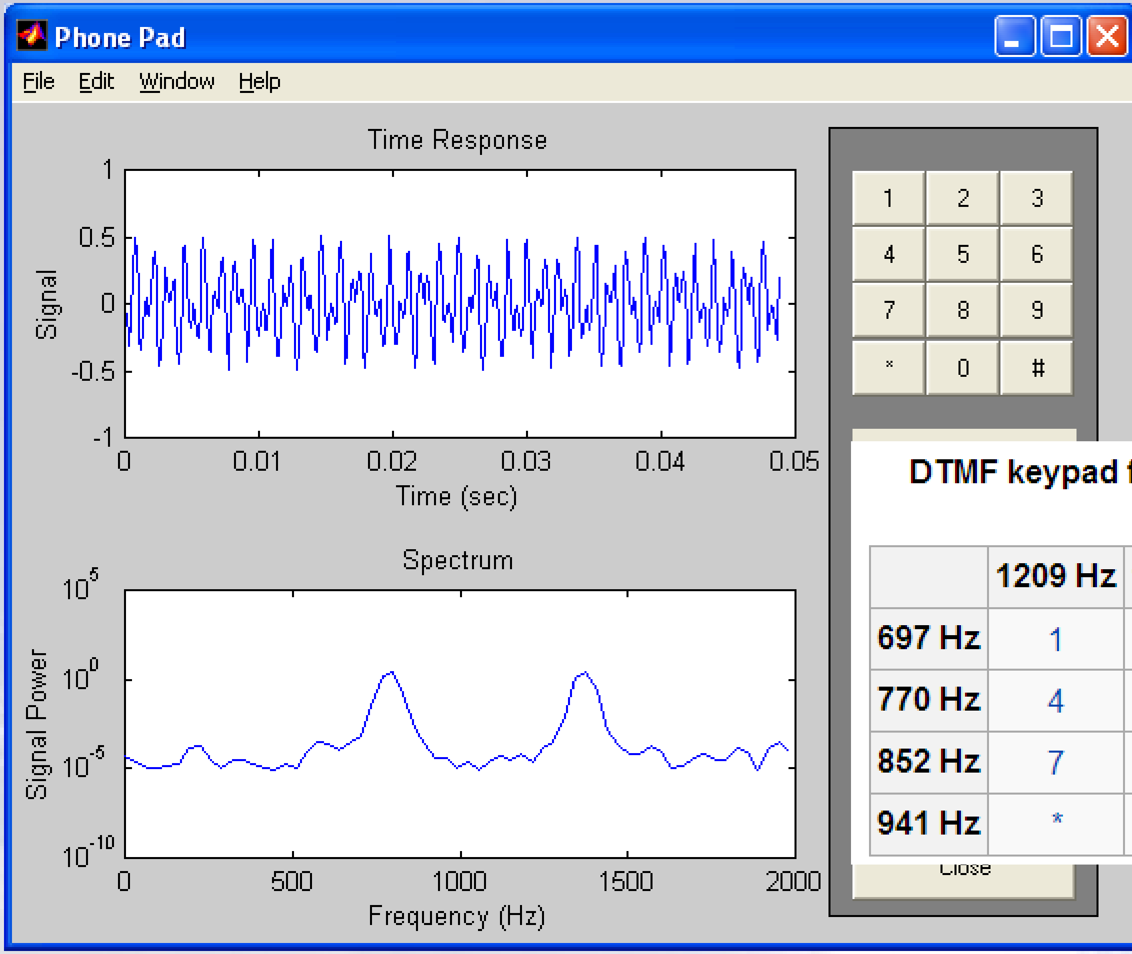
Fourier series



Joseph Fourier
(1768-1830)

Wide range of signals may be represented by linear combination of harmonic functions of different frequencies – so called Fourier series

DTMF - Dual Tone Multi Frequency



DTMF keypad frequencies (with sound clips)

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

http://onlinetonegenerator.com/dtmf.html

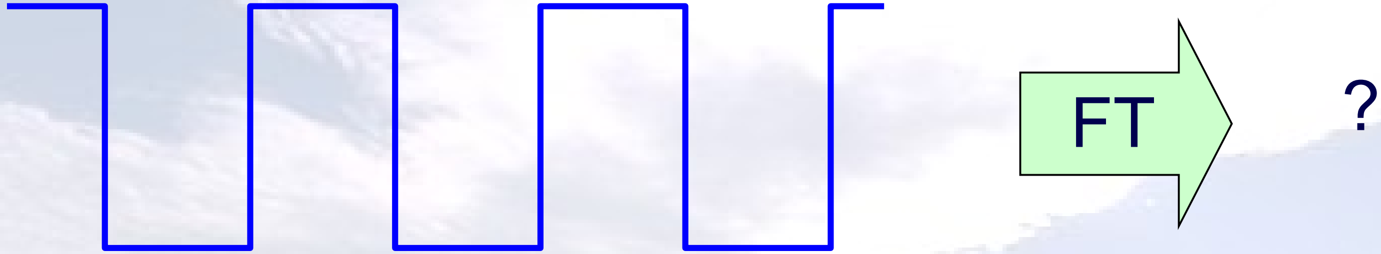
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fourier Transform

How to combine amplitutes of individual harmonics (of varying frequencies) in order to obtain a representation of a signal of an arbitrary shape?



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Trigonometric Fourier series

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$

where: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ fundamental frequency [rad/s]

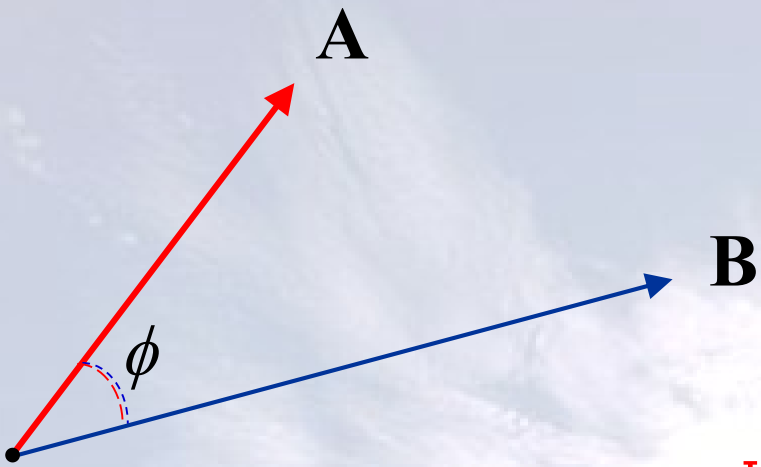
and:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t) \sin k\omega_0 t dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

Inner product of vectors



$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\,cos\,\phi}$$

Inner product of vectors is a scalar

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \quad dla \quad \phi = 90^\circ$$

i.e. for orthogonal vectors

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = min < 0 \quad for \quad \phi = 180^\circ$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = max > 0 \quad for \quad \phi = 0^\circ$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

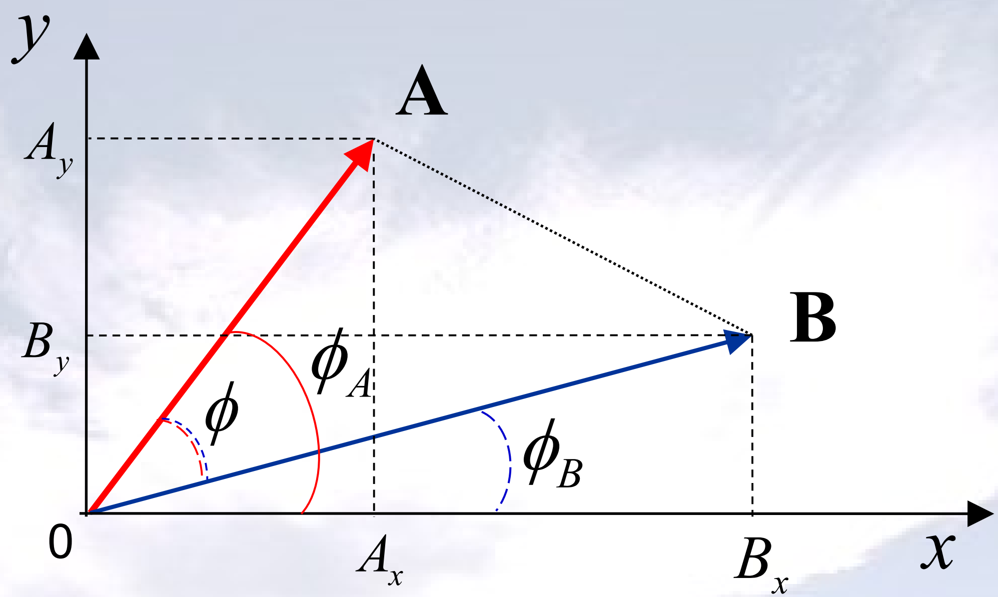
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Inner product of vectors in a Cartesian coordinate system

$$\mathbf{A} = [A_x, A_y]$$
$$\mathbf{B} = [B_x, B_y]$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y}$$



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos(\phi_A - \phi_B) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|(\cos\phi_A \cos\phi_B + \sin\phi_A \sin\phi_B) =$$
$$= |\mathbf{A}|\cos\phi_A |\mathbf{B}|\cos\phi_B + |\mathbf{A}|\sin\phi_A |\mathbf{B}|\sin\phi_B = A_x B_x + A_y B_y$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Inner product of vectors

On the Euclidean plane →

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y}$$

For an *N*-dimensional vectors:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$$
$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_N]$$

These can be interpreted as samples of functions

$$\boxed{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_N y_N}$$

$$\equiv$$

$$\boxed{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \mathbf{X}^T\mathbf{Y} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_N \end{bmatrix}}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

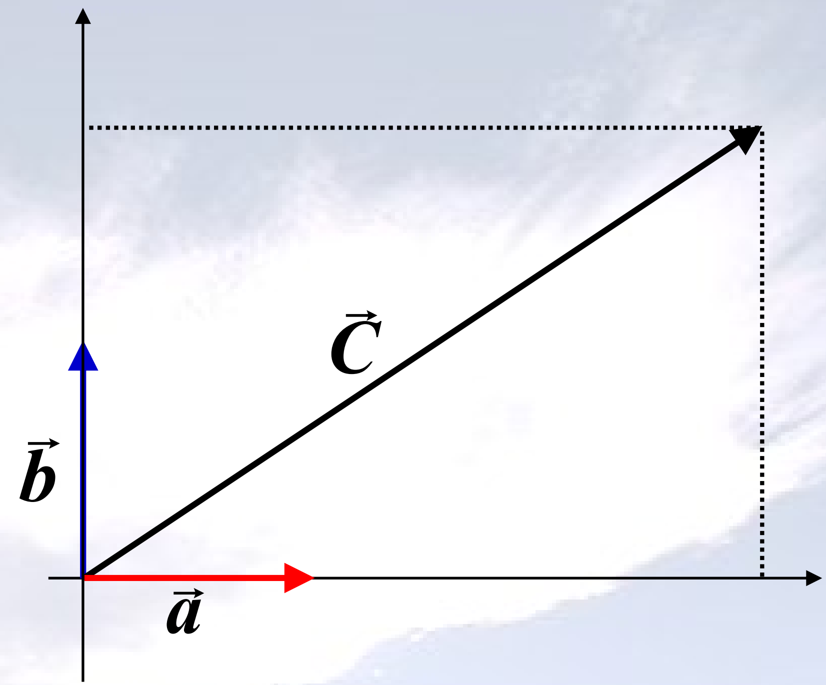
Basis vectors

Problem: We want to represent a given vector $\vec{C}$ by orthogonal (basis) vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ of unit length

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Orthogonal vectors



Basis vectors

Hyphotesis:

$$\vec{C} = \left(\vec{a}\cdot\vec{C}\right)\vec{a} + \left(\vec{b}\cdot\vec{C}\right)\vec{b}$$

Proof:

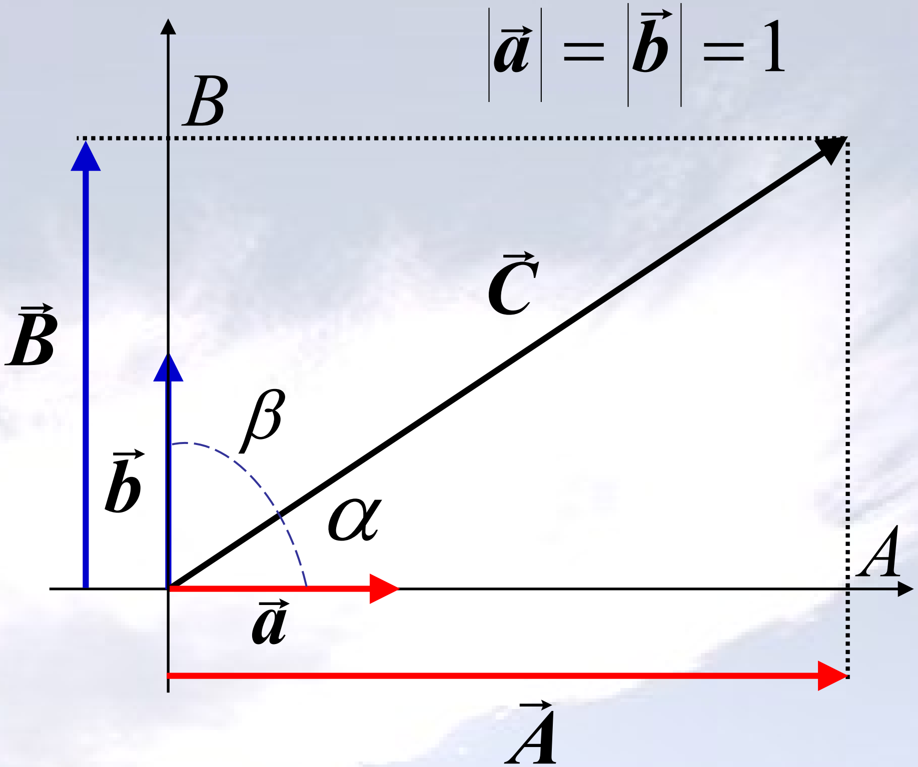
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{C}\right)\vec{a} = \left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{C}\right|\cos\alpha\right)\vec{a} = A\,\vec{a}$$

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{C}\right)\vec{b} = \left(\left|\vec{b}\right|\left|\vec{C}\right|\cos\beta\right)\vec{b} = B\,\vec{b}$$

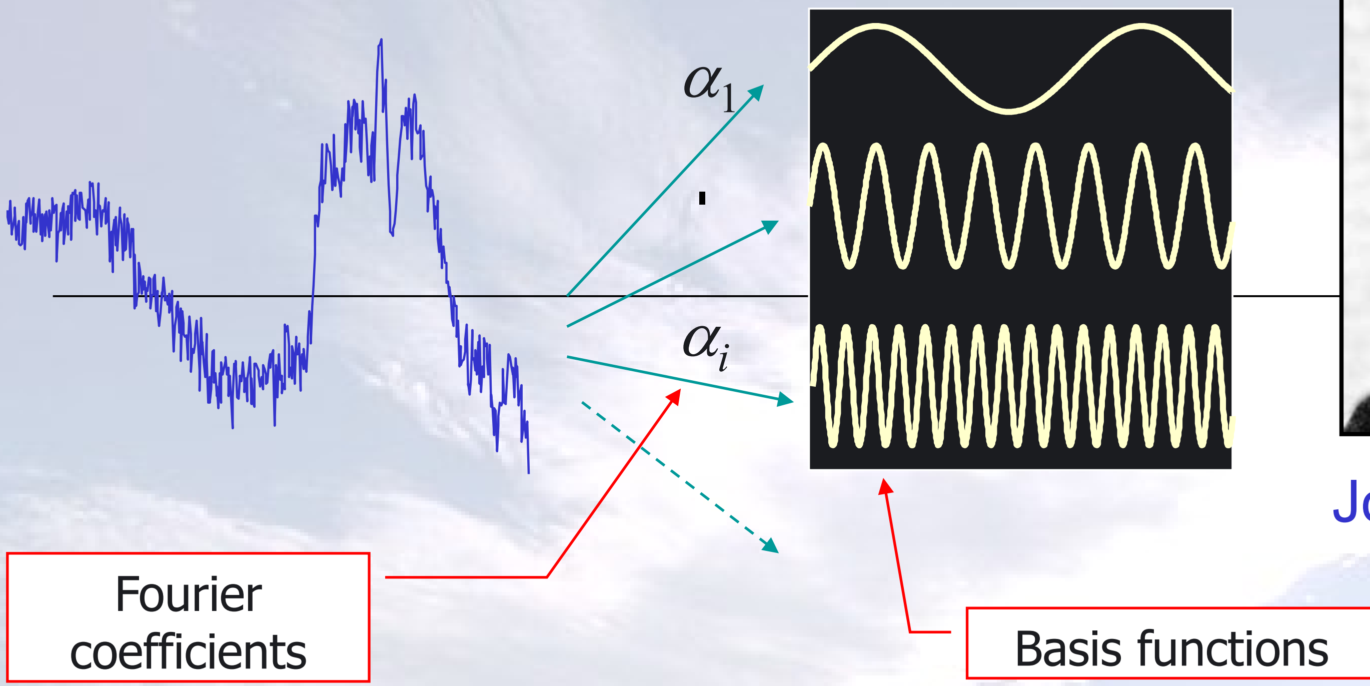
$$\vec{C} = \underline{A\vec{a} + B\vec{b}} = \vec{A} + \vec{B}$$

Linear combintion of basis vectors

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$$



Back to Fourier series



Joseph Fourier (1768-1830)

Wide range of signals may be represented by linear combination of harmonic functions of different frequencies – so called **Fourier series**

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

The problem of function approximation

Consider a task: we wish to approximate a given function g by a weighted sum of n simpler functions f_i :

$$g \approx \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

Linear combination of functions

The set of functions f_i is usually given, our goal is to find out coefficients α_i, such that we get best possible approximation of function g by a set of n simpler functions f_i

Trigonometric Fourier series

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\right)$$

where: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ fundamental frequency [rad/s]

and:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)\,dt$$

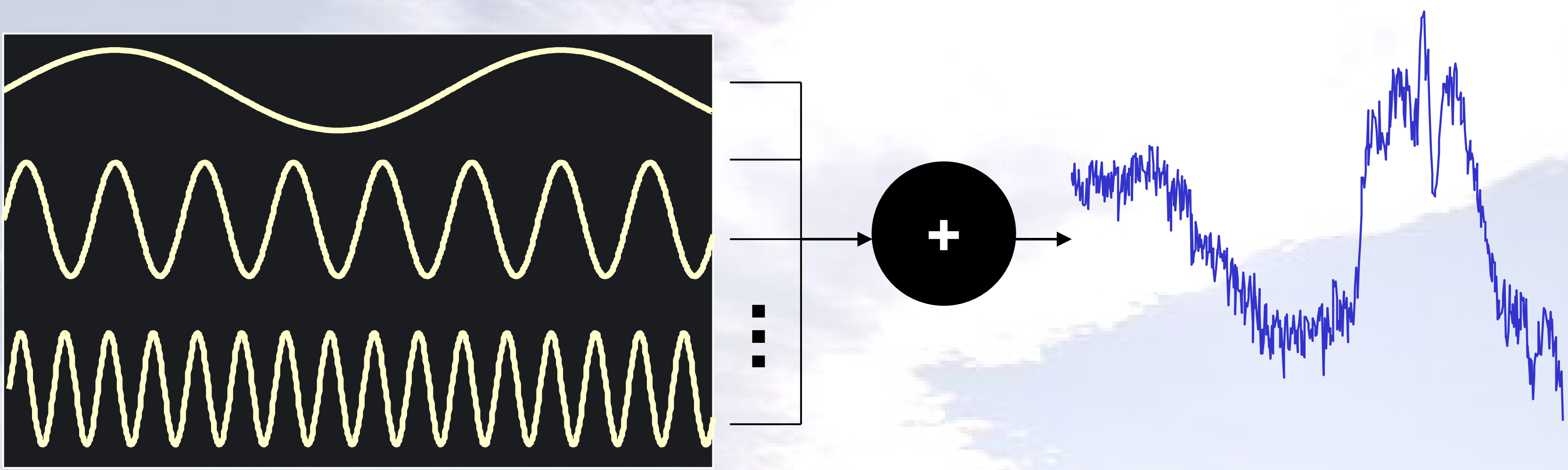
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \boxed{x(t)\cos k\omega_0 t}\,dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \boxed{x(t)\sin k\omega_0 t}\,dt, \quad k = 1,2,\ldots$$

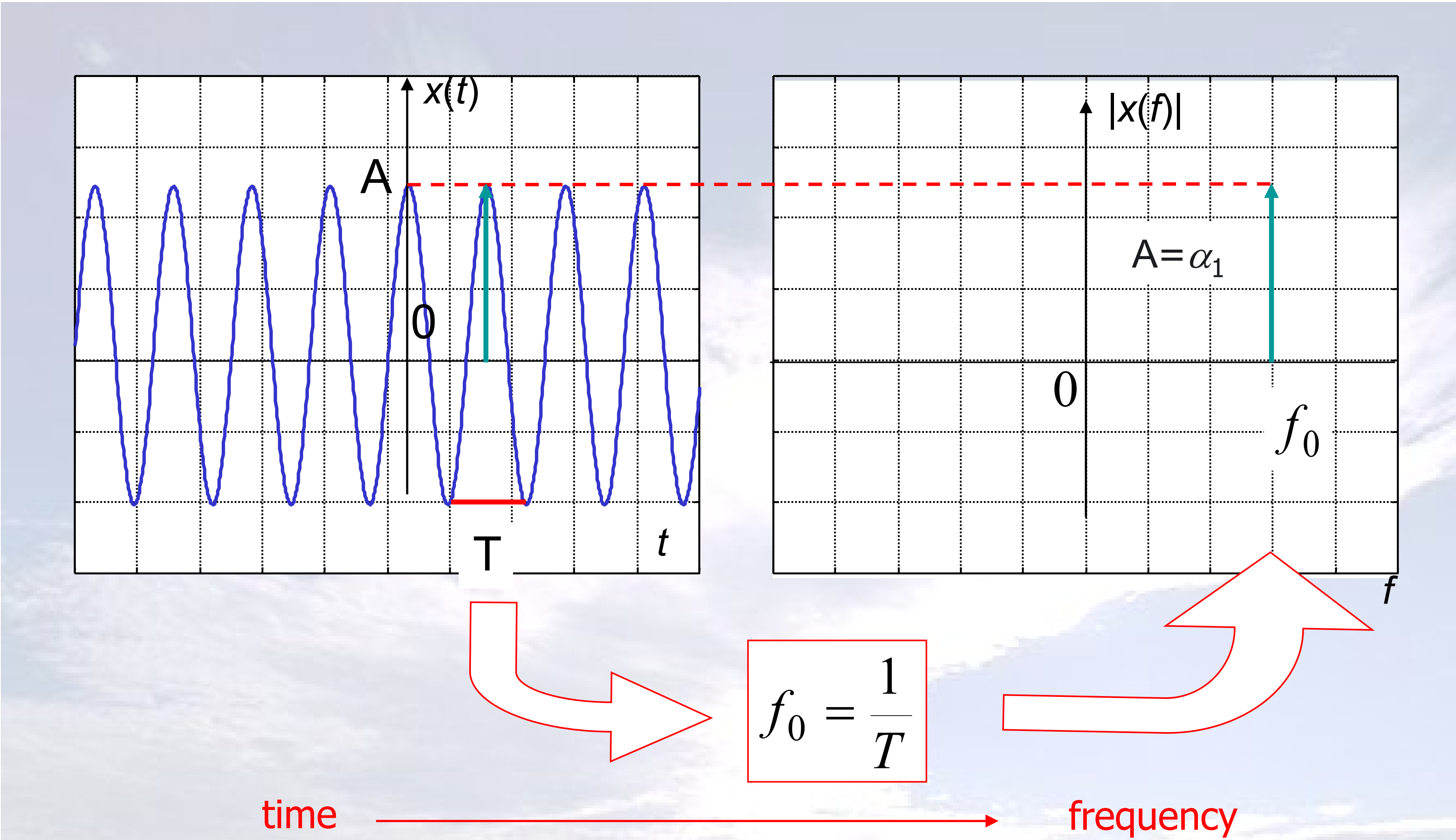
Inner product of functions

Trigonometric Fourier series

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$



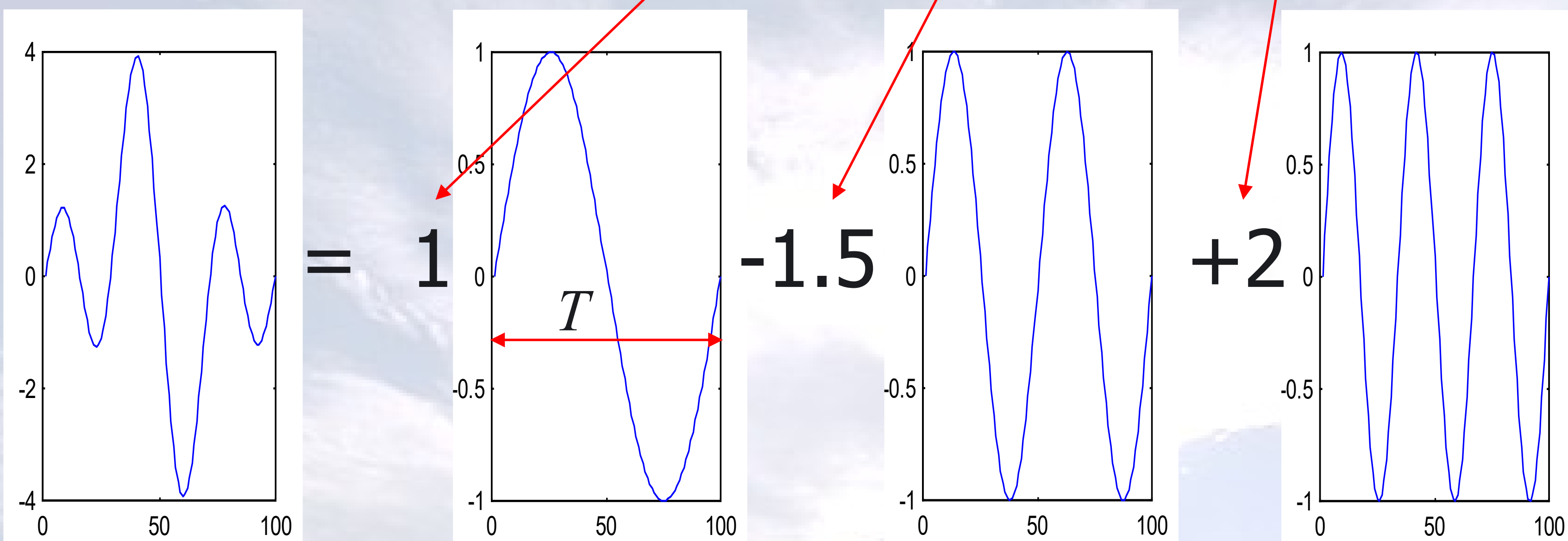
Fourier serises of a cosinusoid



Fourier series - example

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$x(t) = \sin\omega_0 t - 1.5 \cdot \sin 2\omega_0 t + 2 \cdot \sin 3\omega_0 t$$



Fundamental frequency

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fundamental period

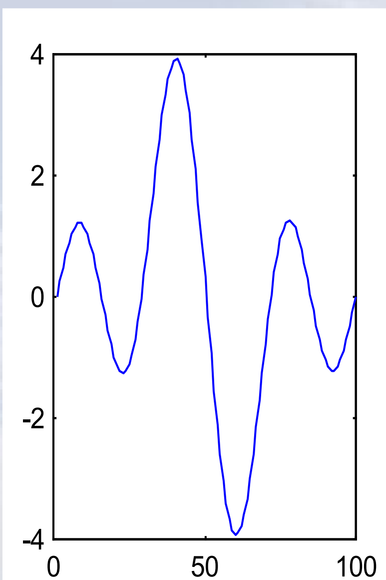
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fourier series - example

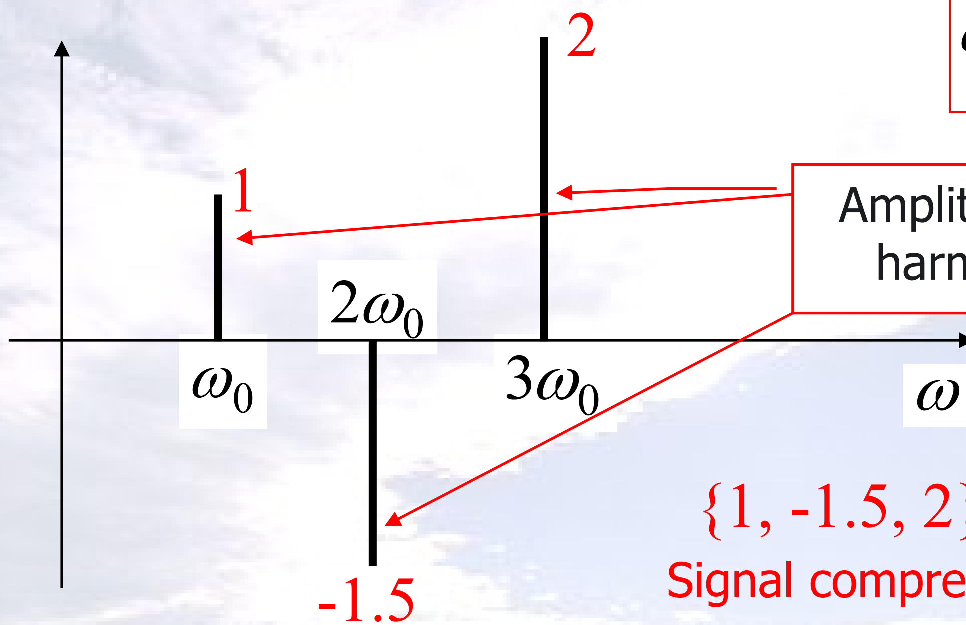
$$x(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$x(t)=1\sin\omega_0 t-1.5\cdot\sin 2\omega_0 t+2\cdot\sin 3\omega_0 t$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$



=



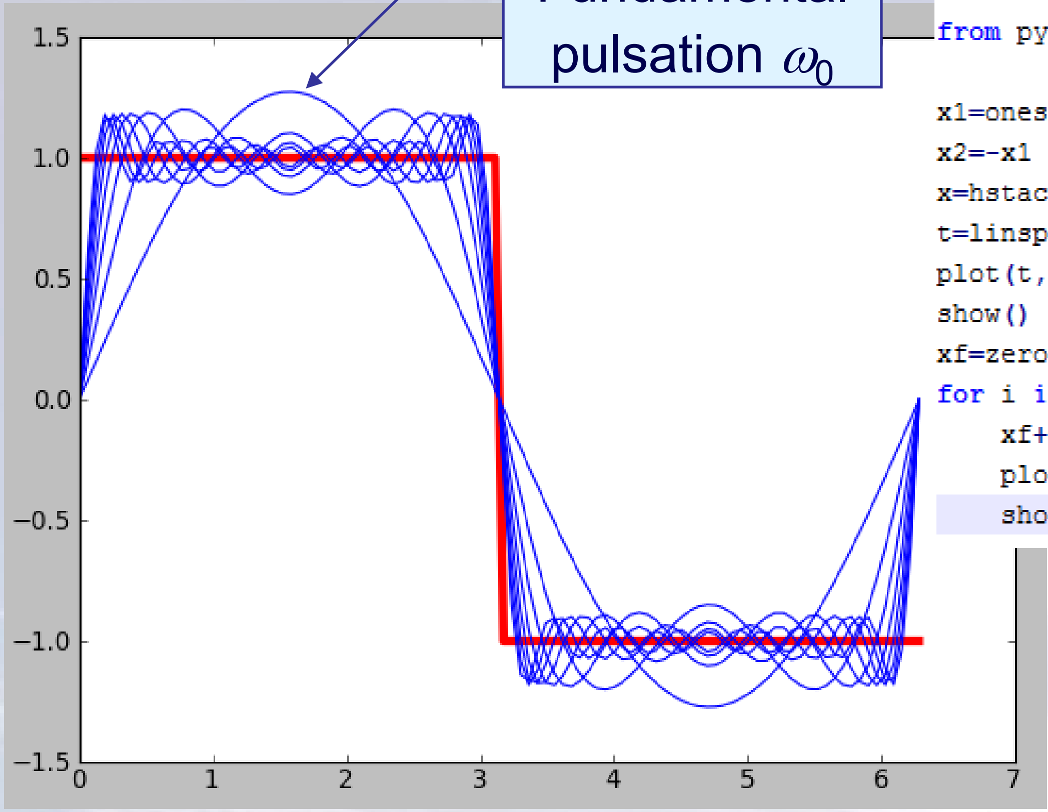
Amplitudes of harmonics

{1, -1.5, 2}

Signal compression!

Fourier series - example

Fundamental pulsation ω_0

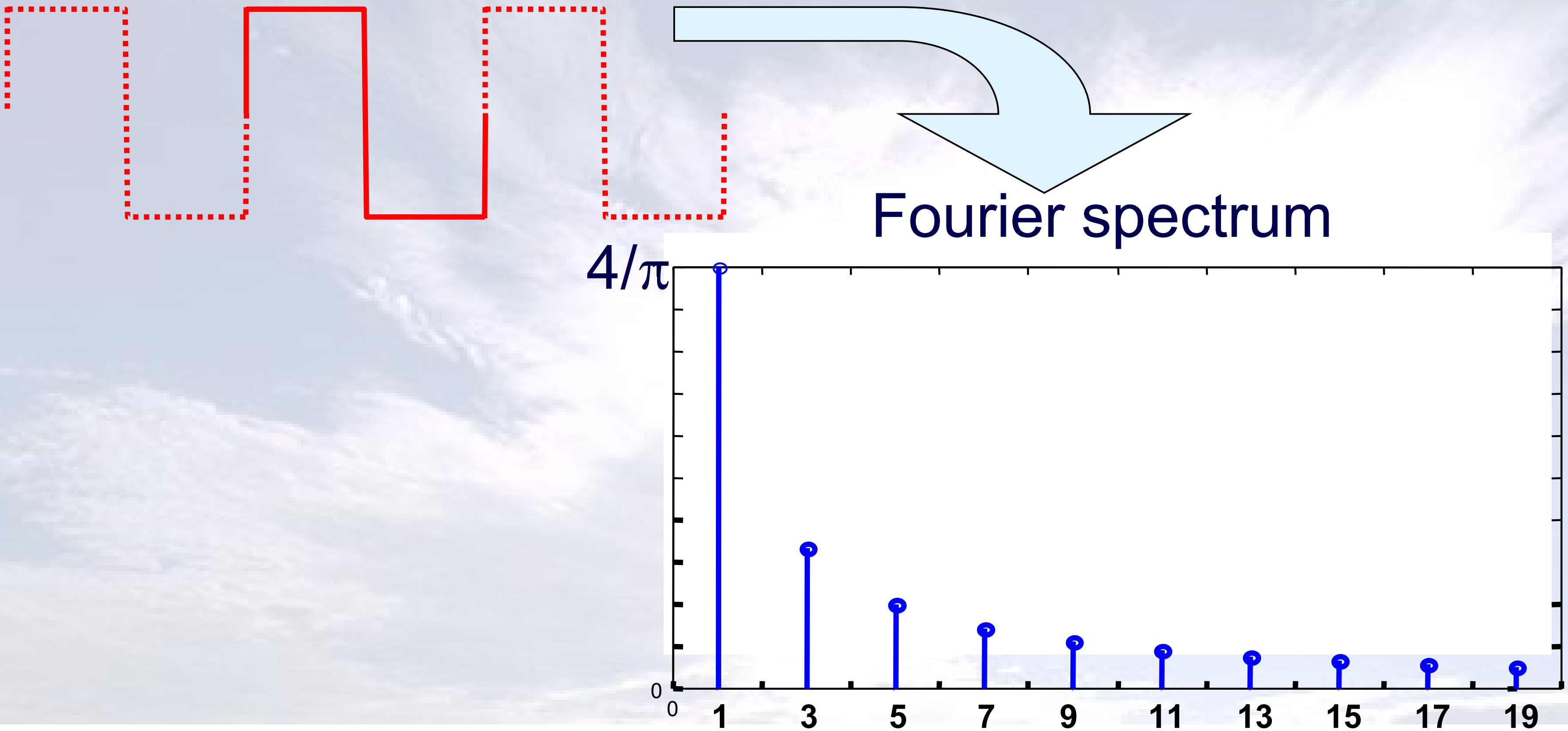



```python
from numpy import sin, ones, hstack, zeros, pi, linspace
from pylab import plot,show

x1=ones(50)
x2=-x1
x=hstack((x1,x2))
t=linspace(0,2.0*pi,100)
plot(t,x,'r', linewidth=4)
show()
xf=zeros(len(t))
for i in xrange(1,17,2):
    xf+=4.0/pi*sin(i*t)/i
    plot(t,xf,'b')
    show()
```

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\ldots\right) \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$$

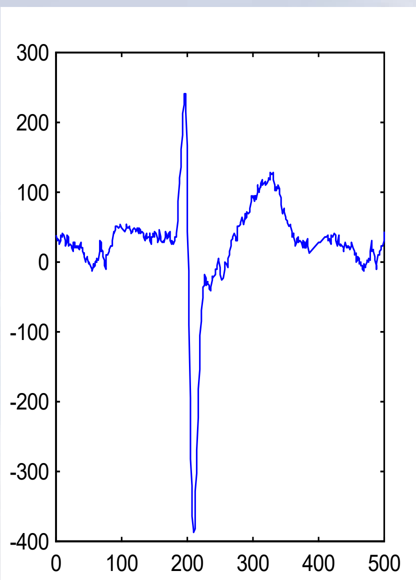
Fourier series - example

See Fourier Series Animation using Circles: www.youtube.com/watch?v=LznjC4Lo7IE

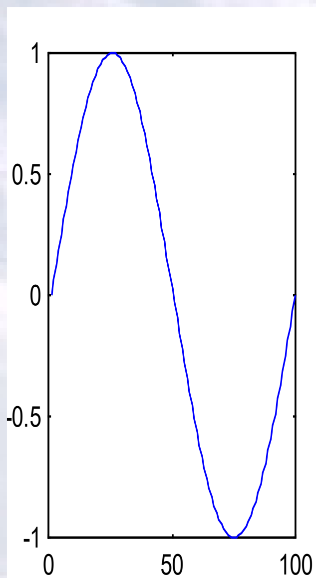


Trigonometric Fourier series

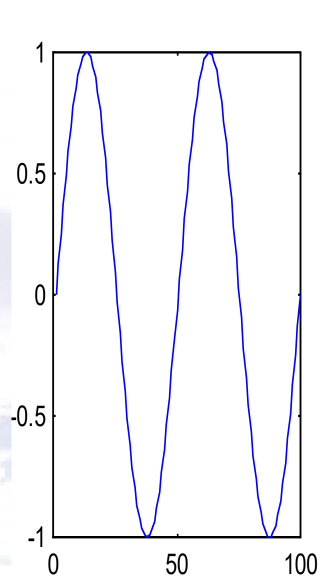
$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t\right)$$



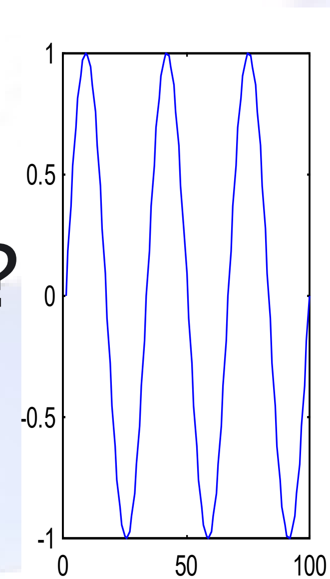
= ?



?



?



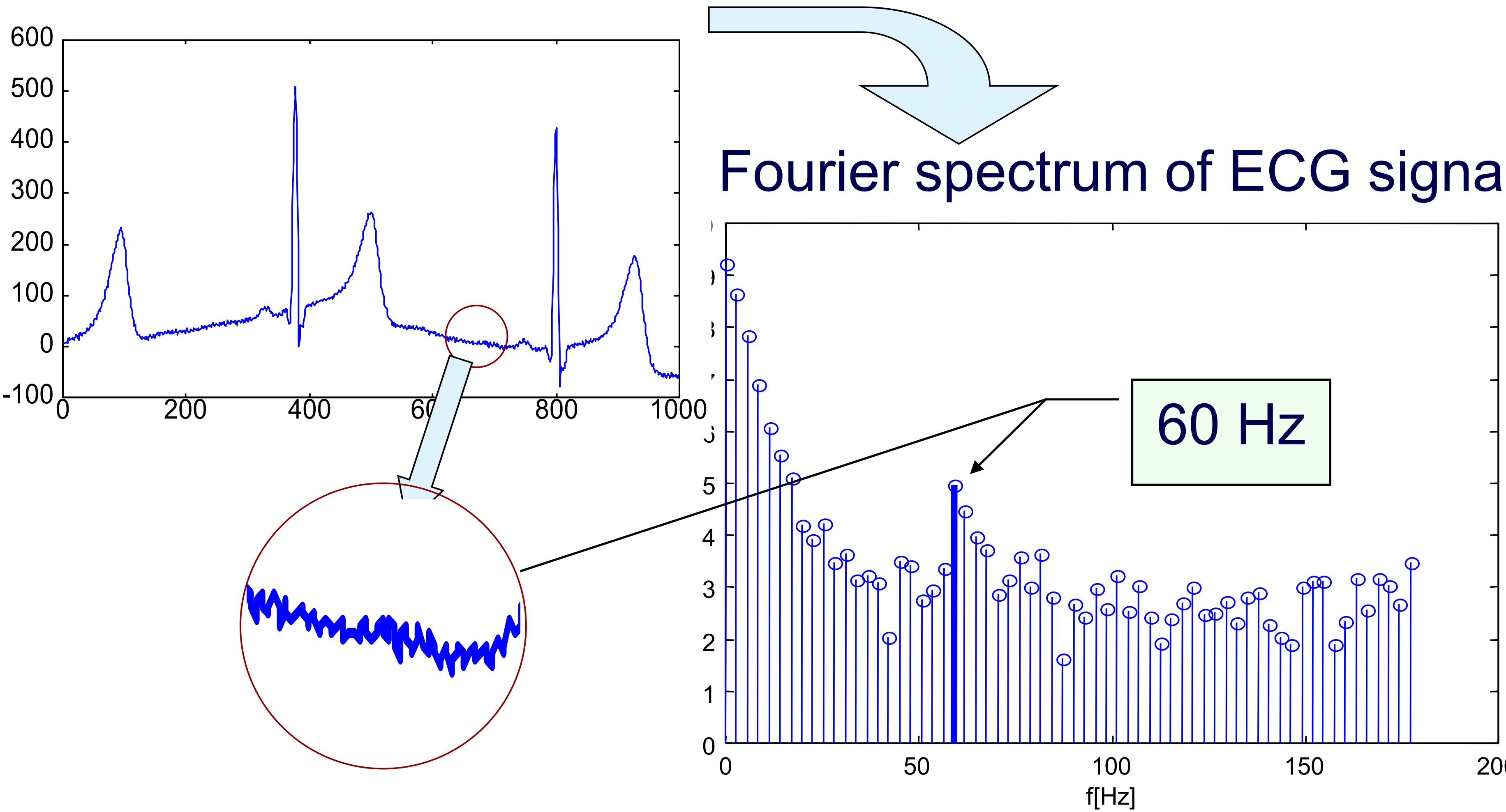
...

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

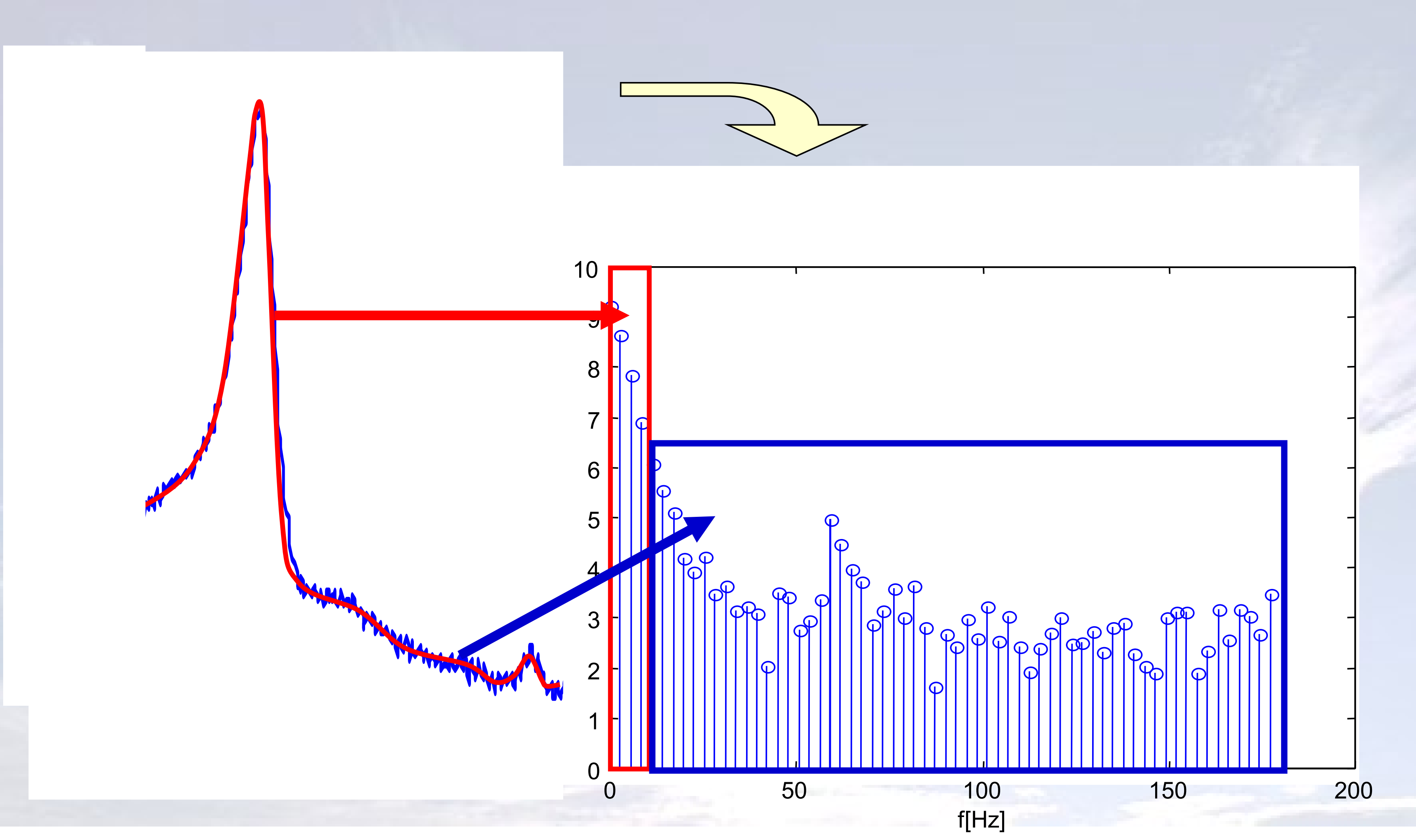
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fourier series of ECG



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fourier series of ECG



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Exponential Fourier series from trigonometric series

Let:

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k}, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k = j\left(c_k - c_{-k}\right), & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_0 = 2c_0}$$

then:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(c_k + c_{-k}\right)\cos k\omega_0 t + j\left(c_k - c_{-k}\right)\sin k\omega_0 t\right)$$

and finally:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

use:

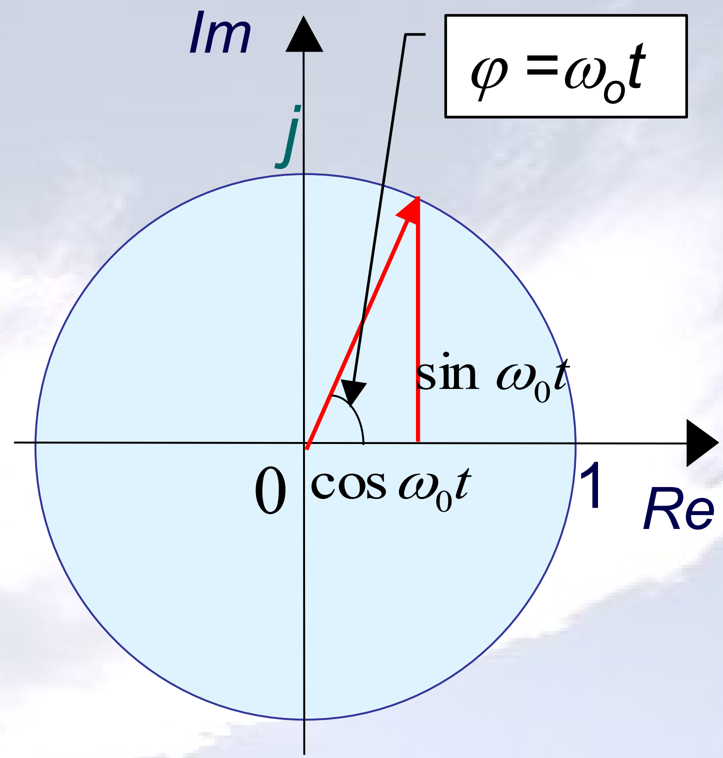
$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

Euler's formula:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$



Fourier coefficients

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

where:

$$X(k)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\ X(0)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

Fourier Transform

Replace $k\omega_0$ by continuous pulsation ω:

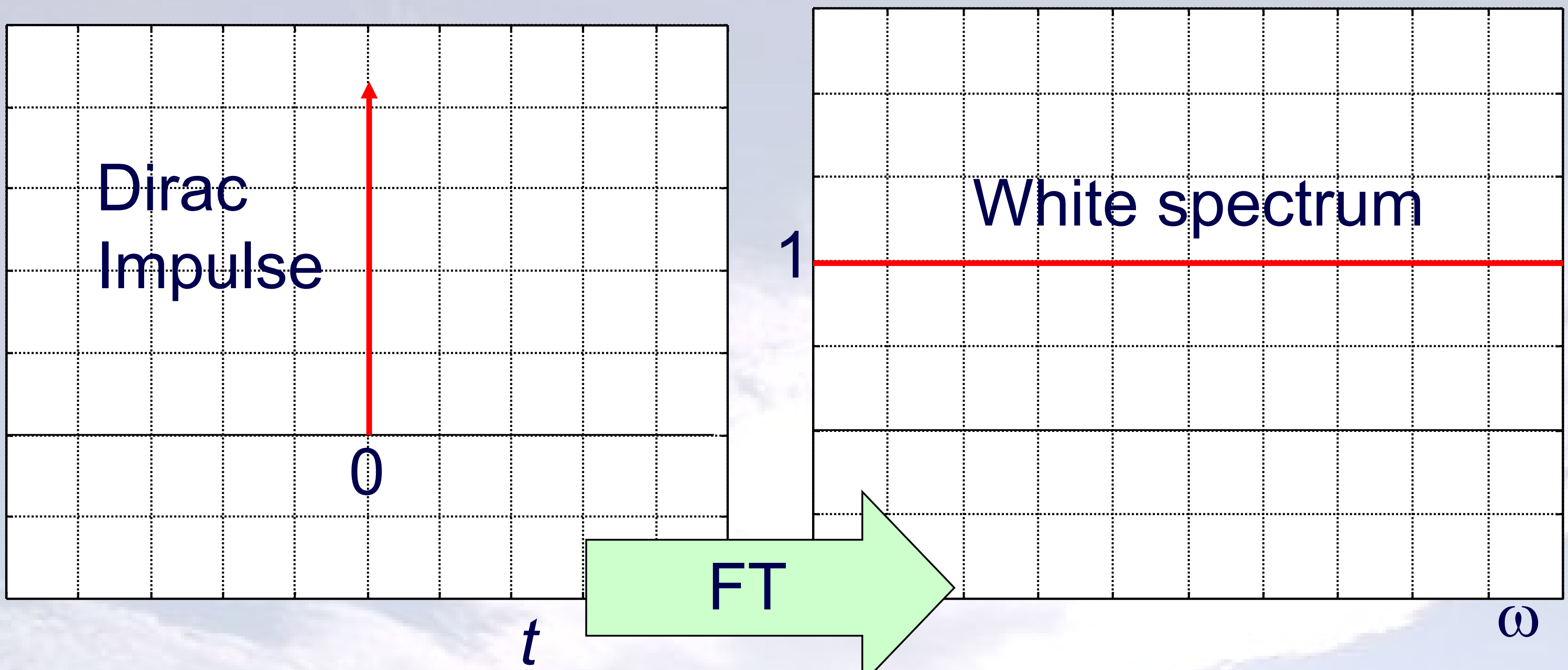
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{X(j\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

Complex Fourier coefficients

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

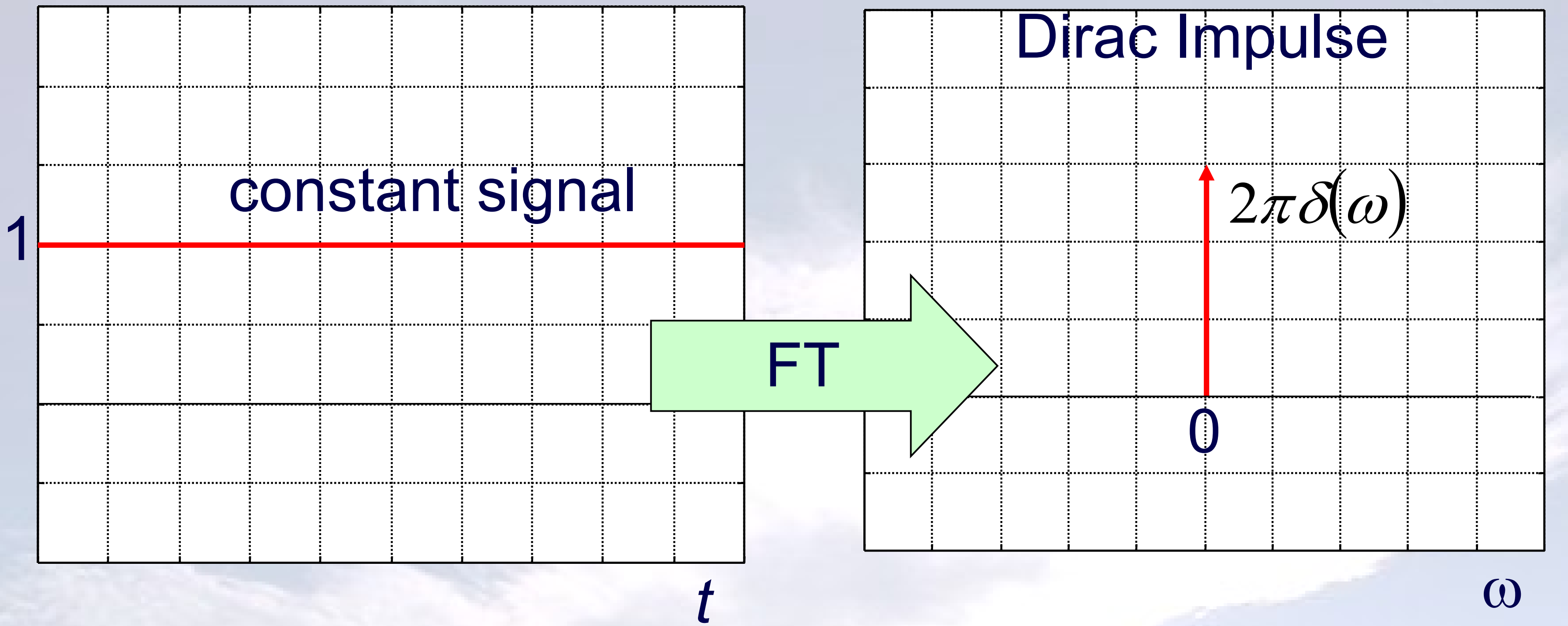
Complex numbers!

Fourier Transform - example



$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & for\ t=0\\ 0 & for\ t\neq 0\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt=1$$

Fourier Transform - example

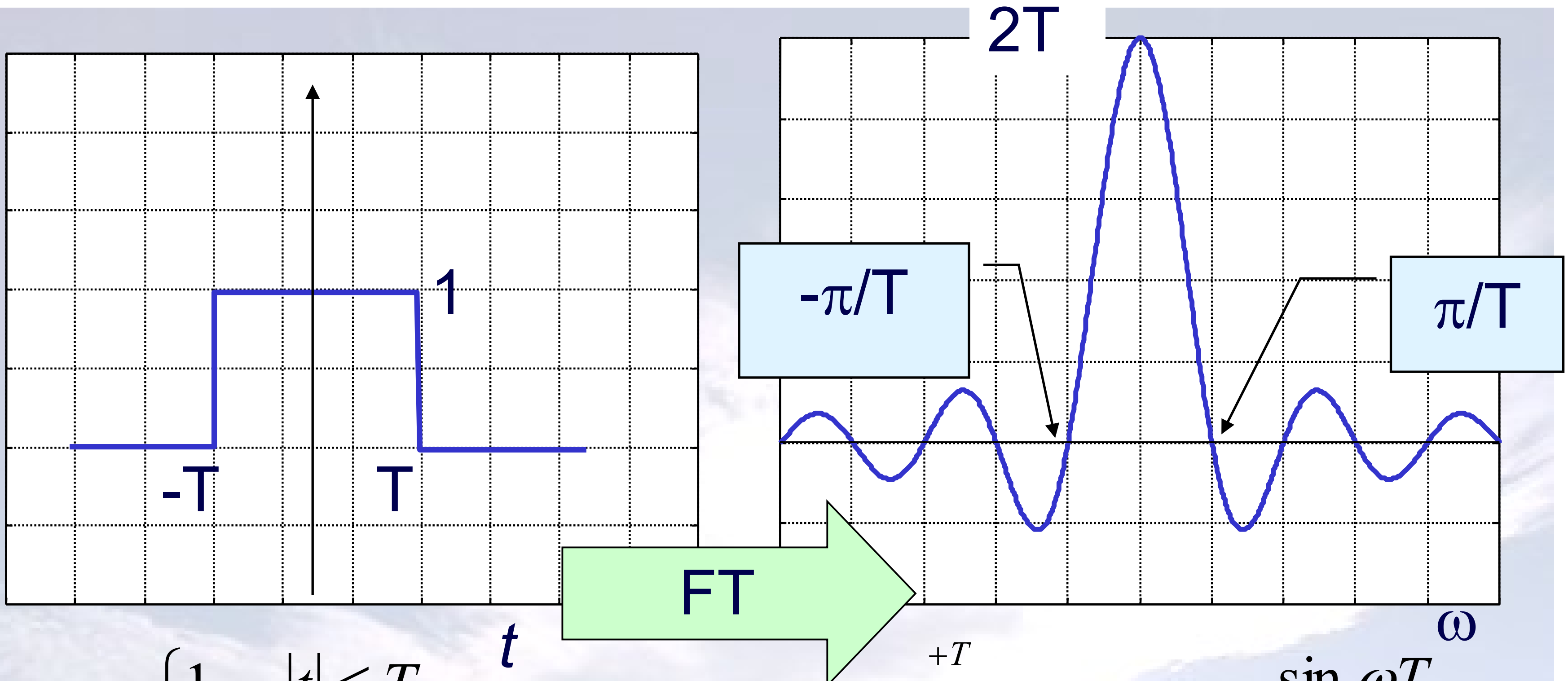


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(\omega) = \begin{cases} \infty & for\ \omega = 0 \\ 0 & for\ \omega \neq 0 \end{cases}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Fourier Transform - example



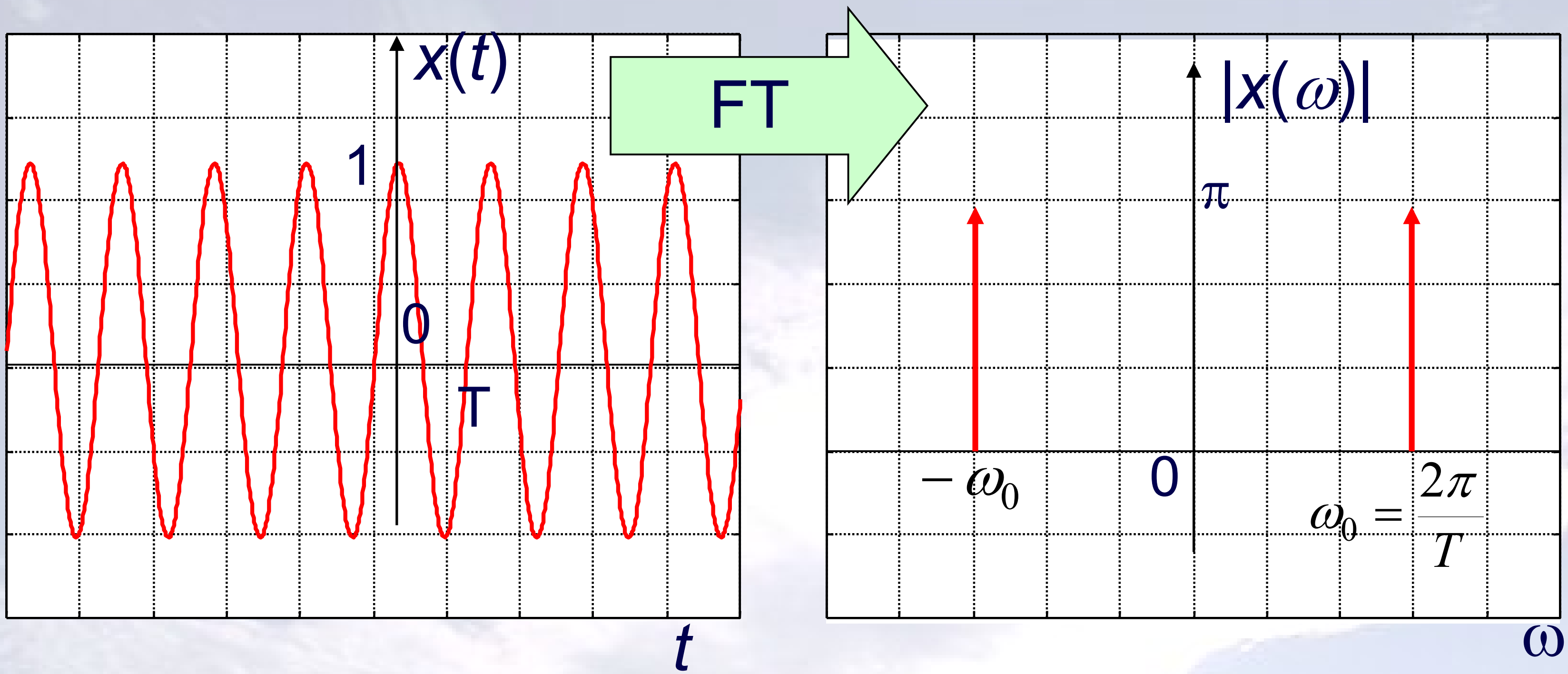
$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

$$X(j\omega)=\int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t}\,dt = 2T\,\frac{\sin\omega T}{\omega T}$$

A signal of finite length has infinitely wide spectrum

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

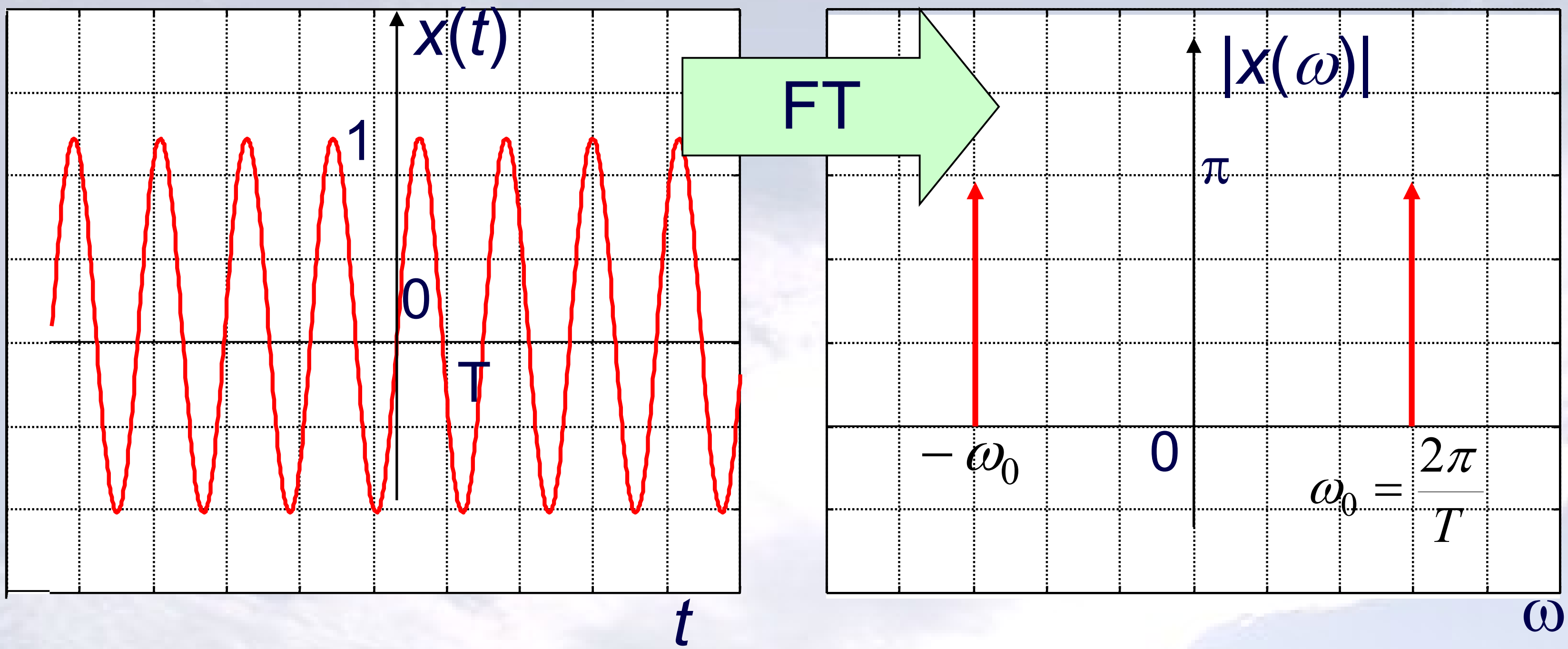
Spectrum of a harmonic function



$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

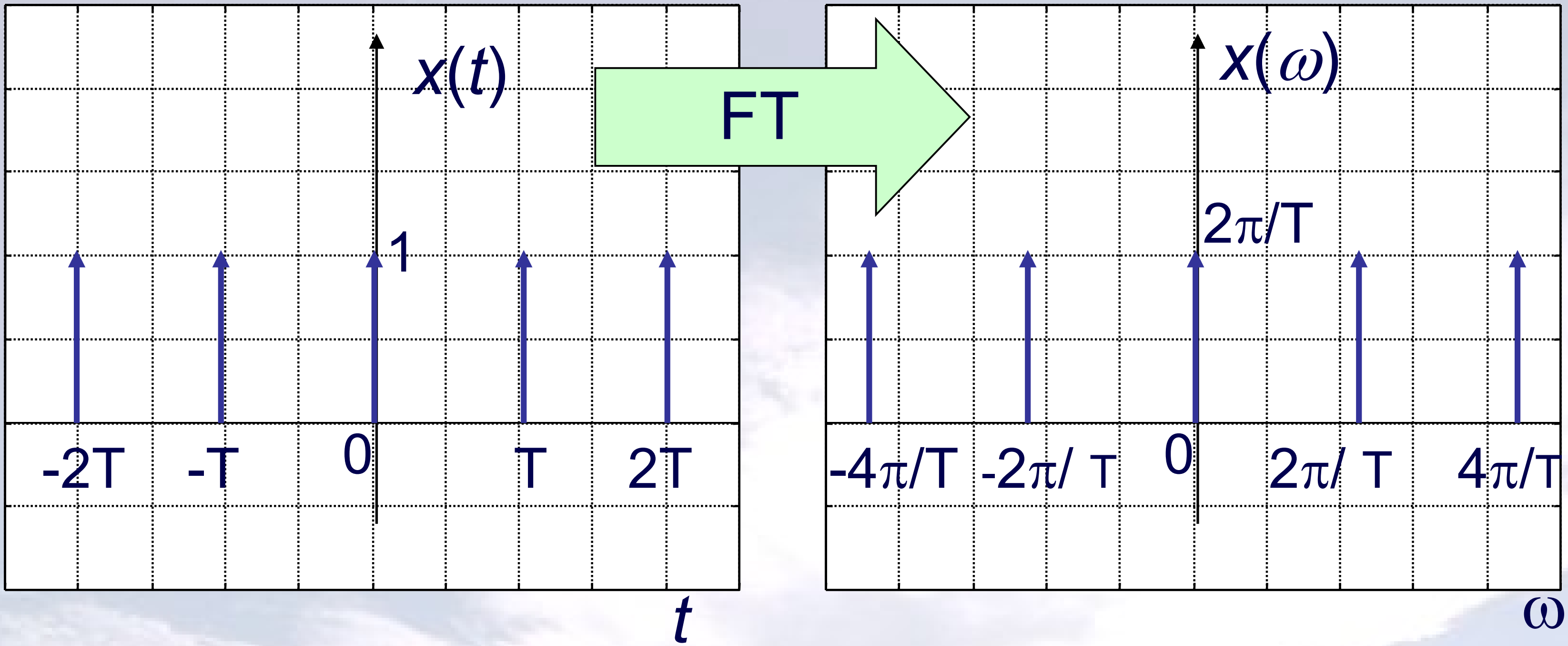
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spectrum of a harmonic function



$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \quad \leftrightarrow \quad -\frac{j}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Series of unit impulses



$$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad \leftrightarrow \quad \omega_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$where \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Some properties of Fourier Transform

1. Linearity: $$a x(t) + b y(t) \leftrightarrow a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

2. Scaling: $$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$$

3. Convolution: $$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) Y(j\omega)$$

4. Multiplication: $$x(t) y(t) \leftrightarrow X(j\omega) * Y(j\omega)$$

5. Parseval's equality: $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

6. Modulation: $$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

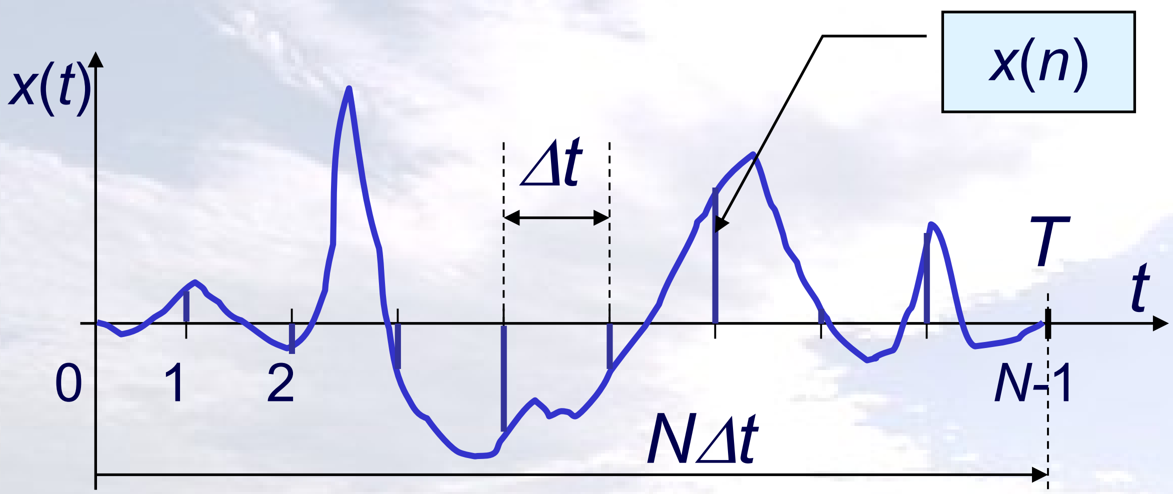
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Discrete Fourier Transform

Periodic signal $x(t)$ is sampled N times during its period T, ie. $T=N\Delta t$. Discrete signal $x(n)$ of period N is obtained:

$$x(n) = x(n+N)$$



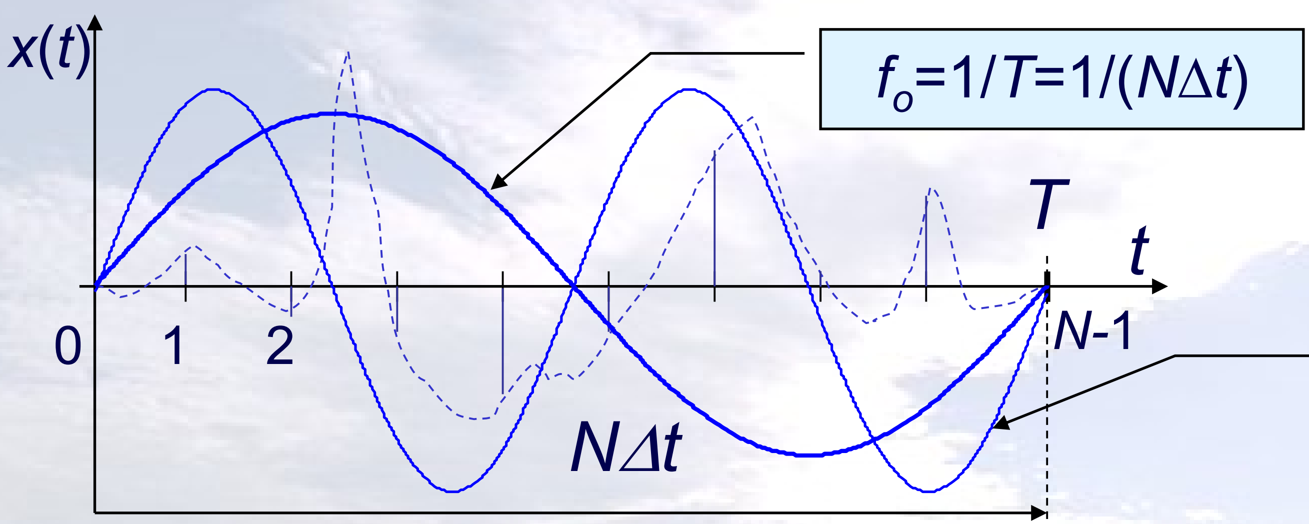
Discrete Fourier Transform

The smallest frequency of Fourier series (fundamental frequency):

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

Frequencies of succesive k-ths harmonics:

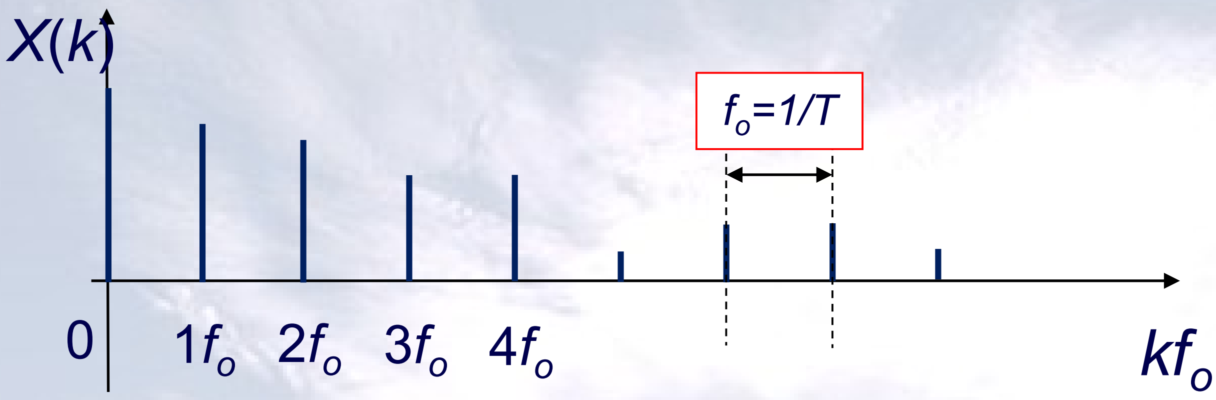
$$kf_0 = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{kf_s}{N}$$



Discrete Fourier Transform

Frequency/time resolution:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

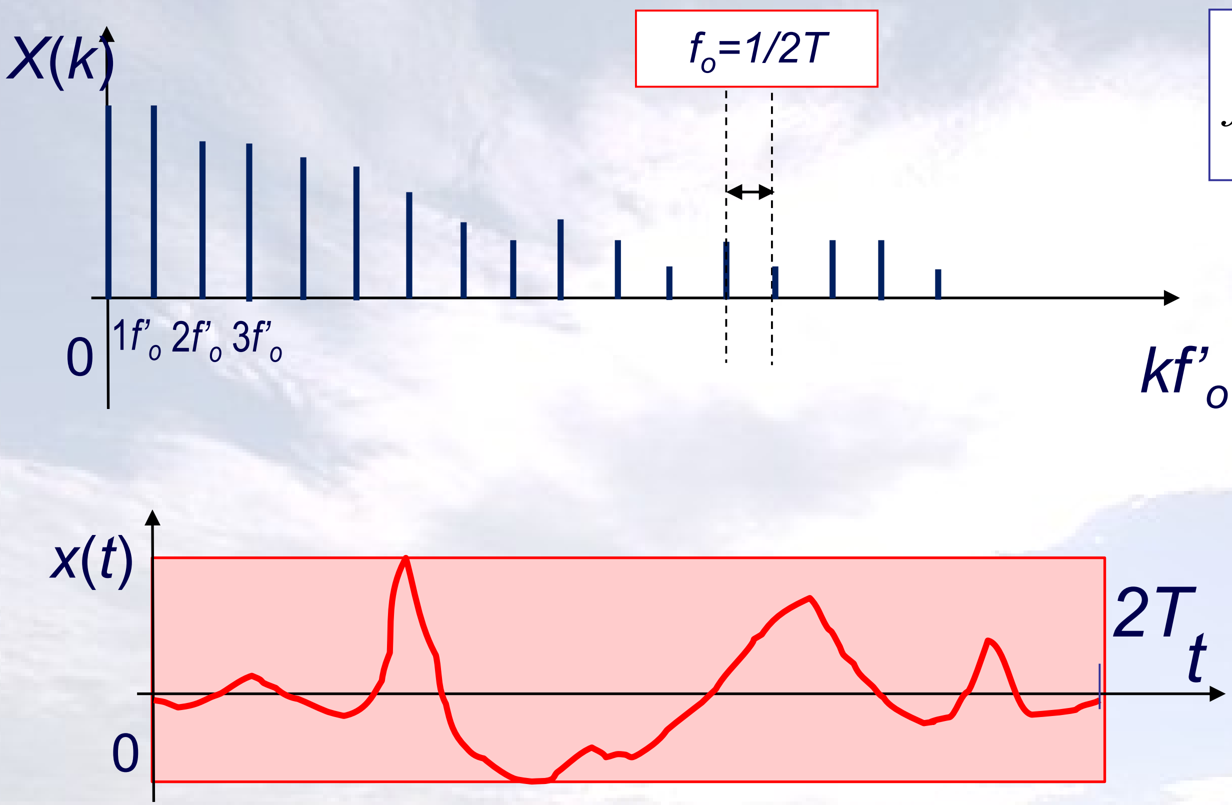


Discrete Fourier Transform

Frequency/time resolution:

$$f_0' = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2N\Delta t} = \frac{f_s}{2N}$$

$$f_0' = \frac{f_0}{2}$$

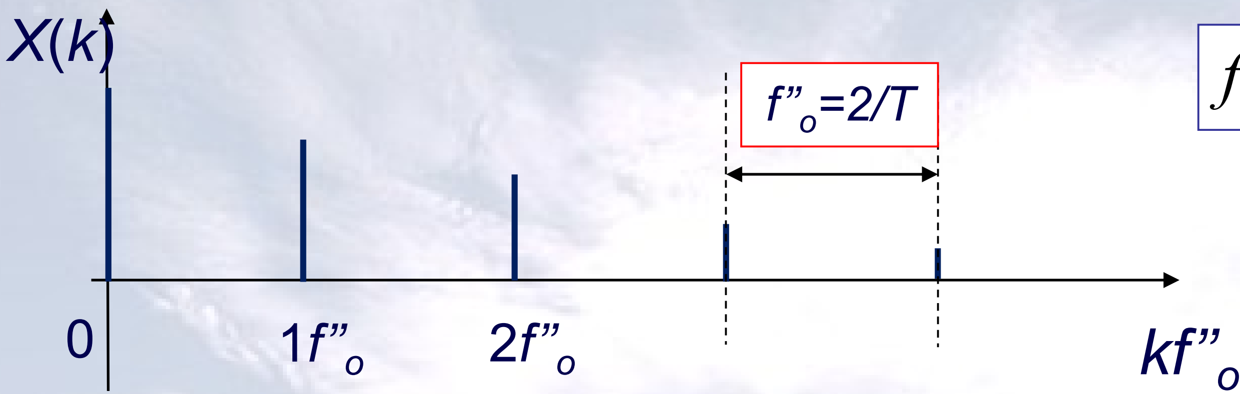


Discrete Fourier Transform

Frequency/time resolution:

$$f_o'' = \frac{2}{T} = \frac{2}{N\Delta t} = \frac{2f_s}{N}$$

$$f_0'' = 2f_0$$



Discrete Fourier Transform

Modifying equations for Fourier series and Fourier coeficients for continuous time:

$$X(k)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

gives corresponding equations for discrete time:

$$X(k)=\frac{1}{N\Delta t}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N\Delta t}\right)n\Delta t}\Delta t=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$k=0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$n=0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

Discrete Fourier Transform

Direct:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

Sample index in time

$k = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

Sample index in frequency

Inverse:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

DFT – amplitude and phase spectrum

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \left|X(k)\right| \cdot e^{j\arg(X(k))}$$

Amplitude spectrum

Phase spectrum

Where:

$$\left|X(k)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]^2 + \mathrm{Im}\left[X(k)\right]^2}$$

$$\arg\left[X(k)\right] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left[X(k)\right]}{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]}\right)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

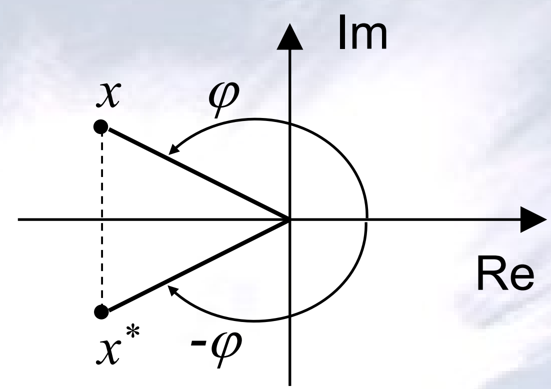
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

DFT – properties

For a real valued signal $x(n)$ the following property holds for its *N*-point DFT:

$$\boxed{X(k) = X^*(N-k)}$$



Hence for the amplitude spectrum (even symmetry):

$$\boxed{|X(k)| = |X(N-k)|}$$

and for the phase spectrum (odd symmetry):

$$\boxed{\arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)]}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

DFT-example

$$x(n) = [1\ 3\ 4\ 4]$$

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1=3} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1=3} x(n)e^{-j2\pi 0n/N} = \frac{1}{4}\left[x(0)+x(1)+x(2)+x(3)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+3+4+4\right] = 3$$

$$X(1) = ?..... = \frac{1}{4}(-3+j)$$

$$X(2) = ?..... = -\frac{1}{4}(2)$$

$$X(3) = ?..... = -\frac{1}{4}(3+j)$$

Amplitude and phase spectrum?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

The symmetry – property

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1=3}x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$N=4$

$$X(k=0)=3$$

$$X(k=1)=\frac{1}{4}(-3+j)$$

$$X(k=2)=-\frac{1}{4}(2)$$

$$X(k=3)=-\frac{1}{4}(3+j)$$

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right)=X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

$$\left|X\left(\frac{N}{2}+k\right)\right|=\left|X\left(\frac{N}{2}-k\right)\right|$$

Amplitude spectrum: <u>even symmetry</u>

$$\arg\left(X\left(\frac{N}{2}+k\right)\right)=-\arg\left(X\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)$$

Phase spectrum: <u>odd symmetry</u>

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

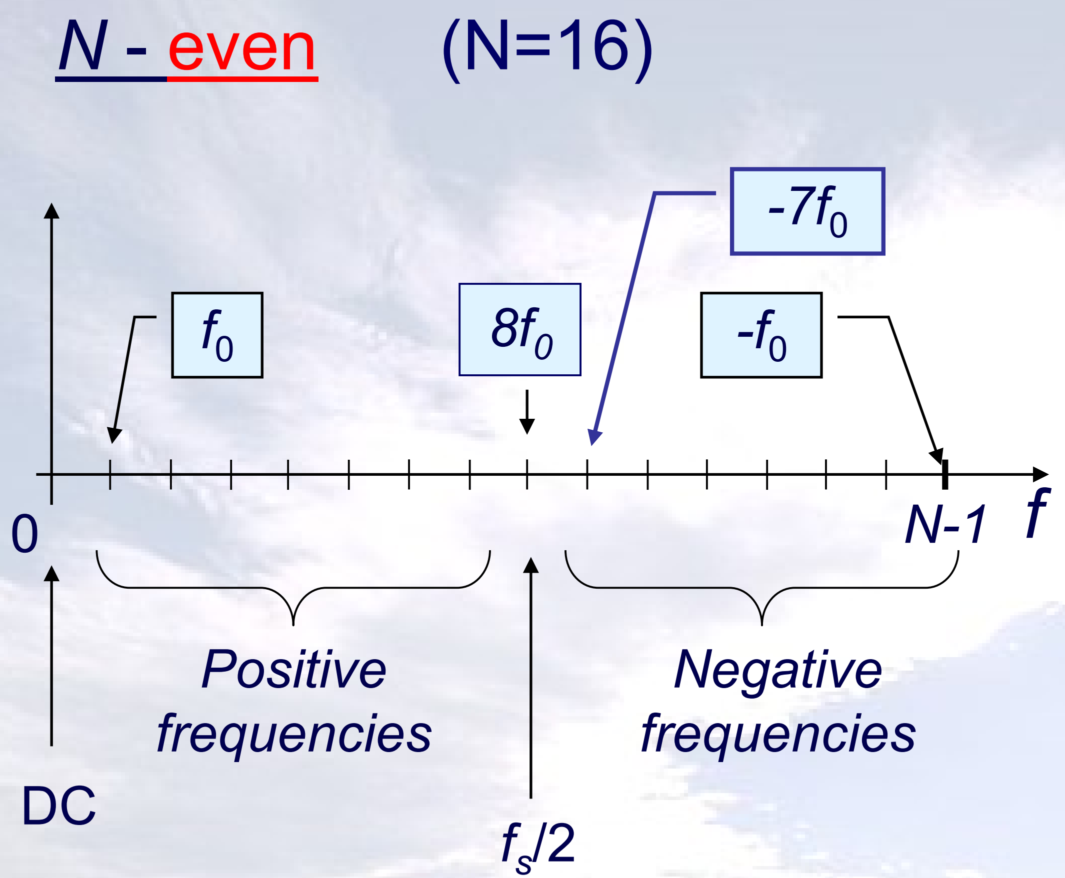
DFT – properties

DFT is periodic:

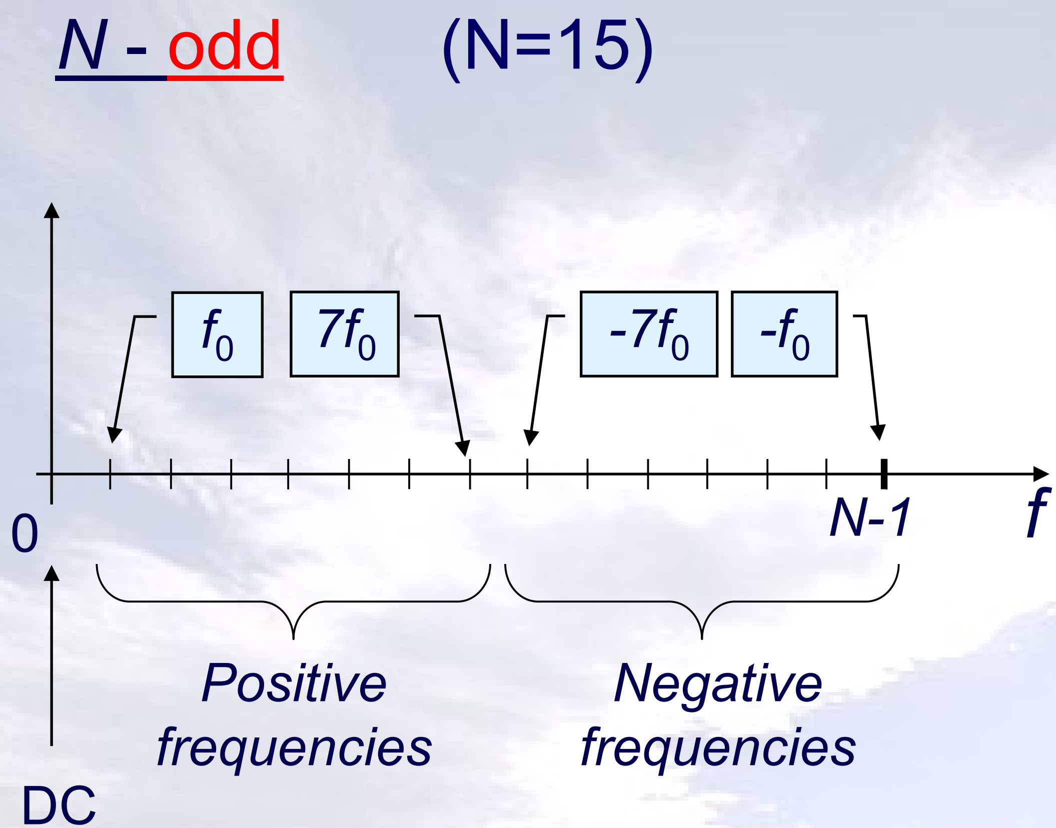
$$\boxed{X(k) = X(k+N)}$$

$$X(k+N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}\underbrace{e^{-j2\pi kn}}_{=\,?} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = X(k)$$

Discrete Fourier Transform – amplitude spectrum

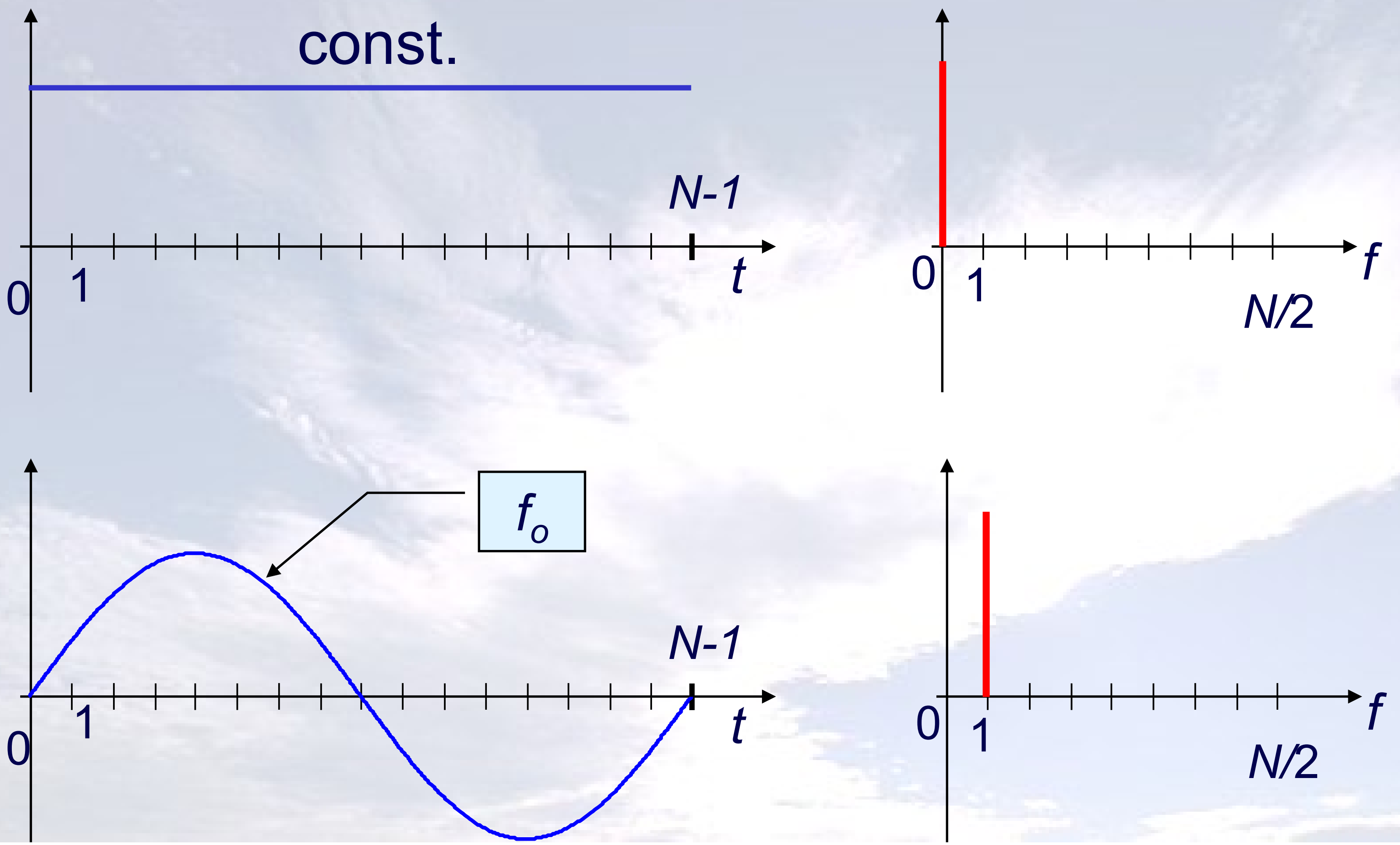


Discrete Fourier Transform – amplitude spectrum

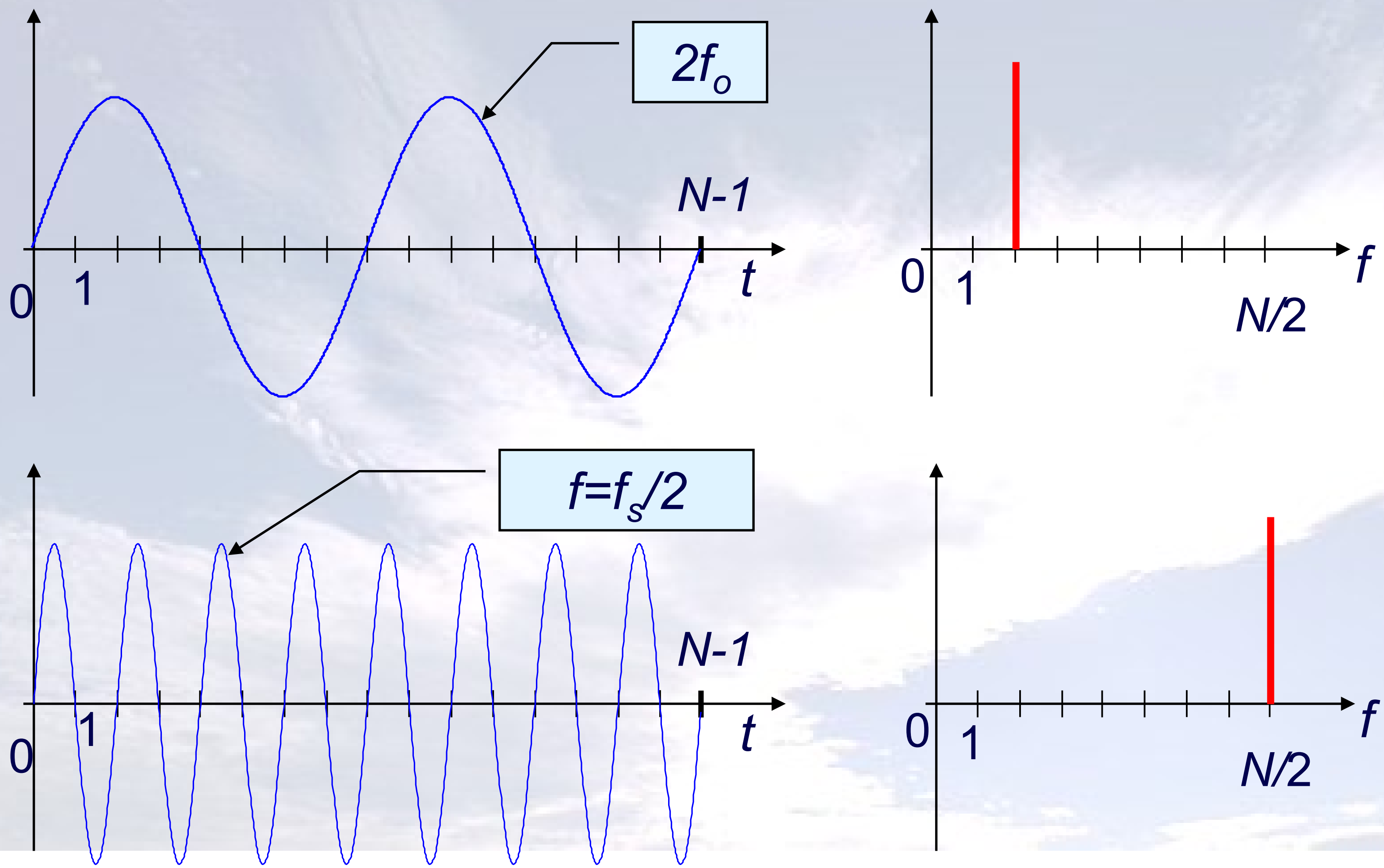


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Discrete Fourier Transform – amplitude spectrum



Discrete Fourier Transform – amplitude spectrum



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples

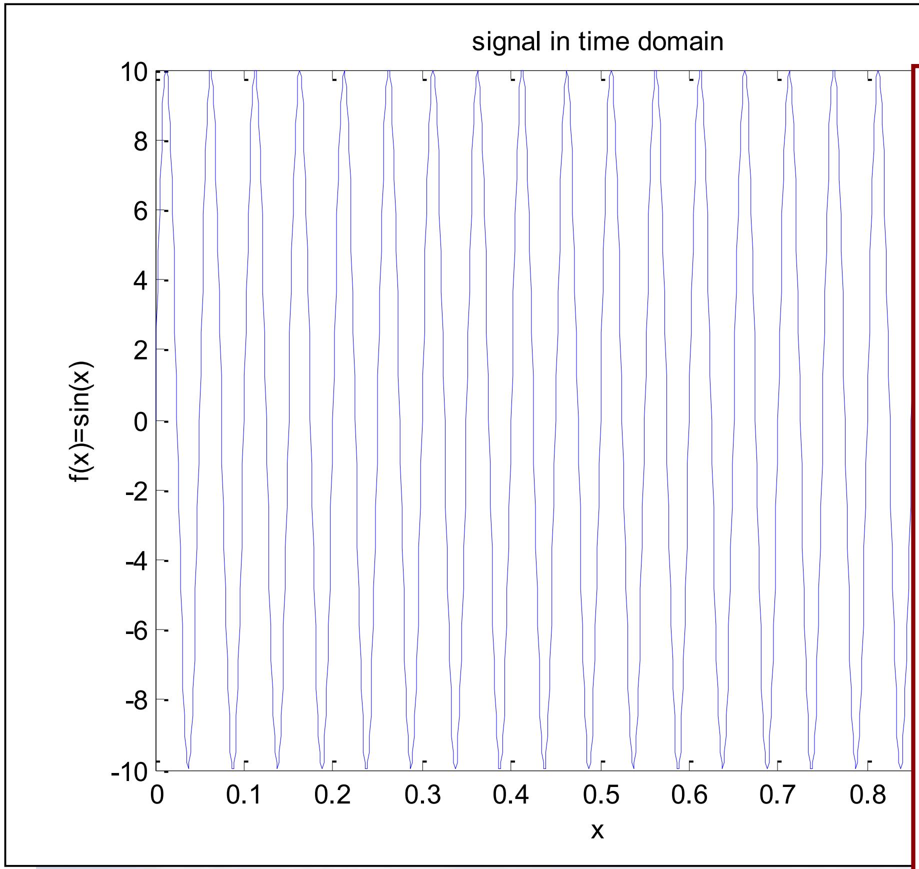
Computer exercise:

- Create N=2000 samples of harmonic signal $x(t)=A\sin(2\pi f_x t)$, where A=10, f_x=20 Hz, sampled with frequency f_s=1000 Hz.

- Plot the signal, determine its frequency spectra and plot them.

- Compute the inverse transform and compare the result with the original signal.

Examples

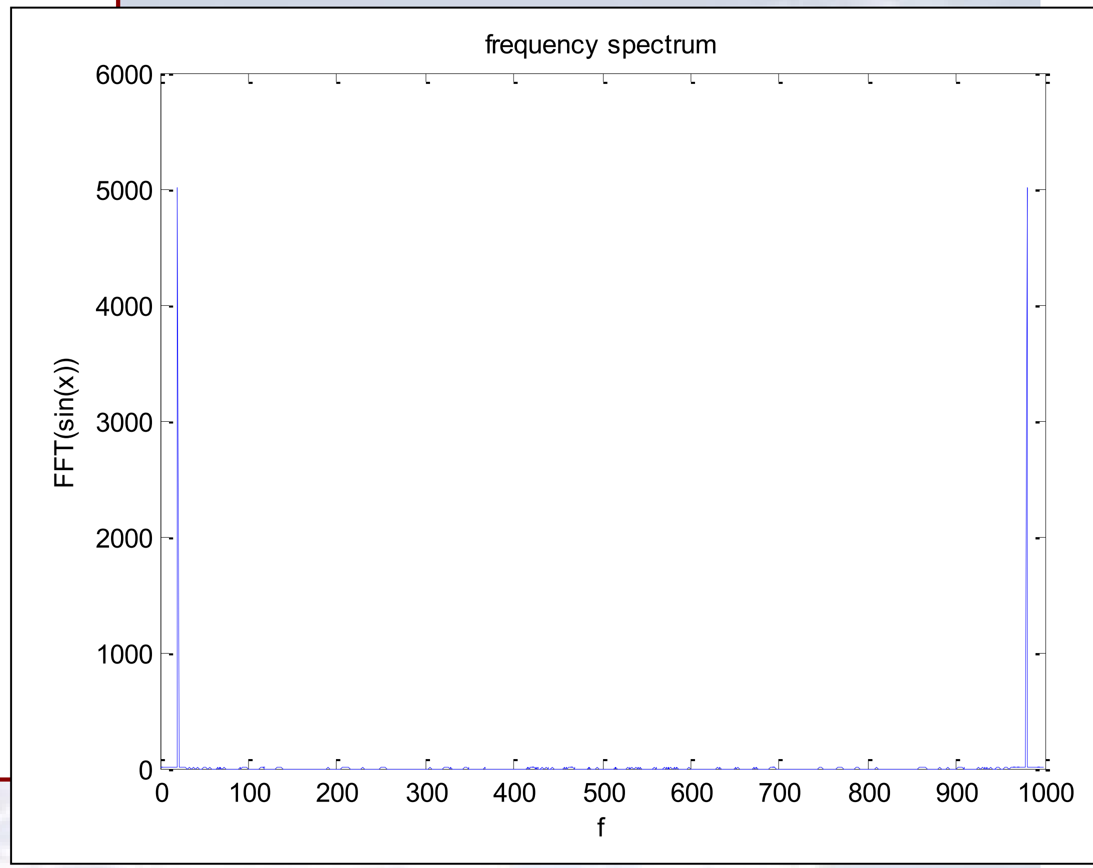



```
N=2000      #number of samples
A=10       #amplitude
fx=20       #sinusoid frequency
fs=1000     #sampling frequency
T=N/fs      #time range
#time scale
t=arange(0,T,1.0/fs)

#sinusoid sample values
x=A*sin(2*pi*fx*t)

#plotting
figure(1)
plot(t,x)
title('signal in time domain')
xlabel('Time [s]')
ylabel('f(x)=sin(x)')
```

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

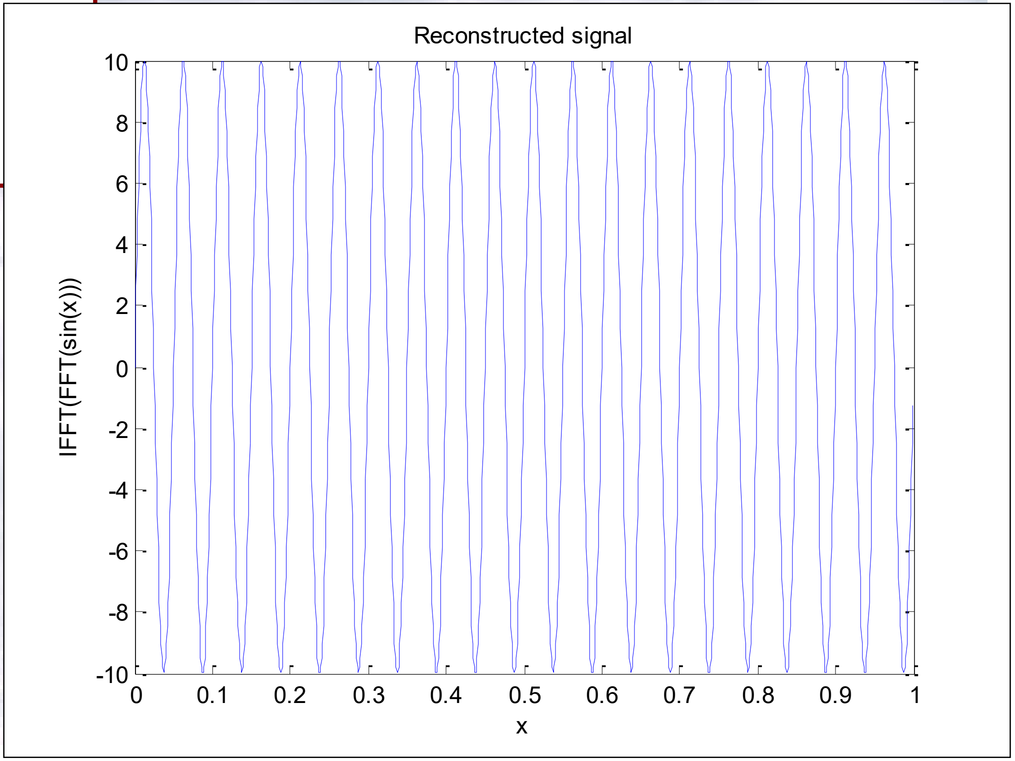
Examples

```
#frequency base determination
f0=float(fs)/N
f=arange(0,N*f0,f0)

#determination of Fourier
   coefficients
X=fft(x)

#plotting
figure
plot(f,abs(X))
title('frequency spectrum'
xlabel('f')
ylabel('FFT(sin(x))')
```



Examples

```
#inverse
iX=ifft(X)
figure; plot(t,real(iX))
title('Reconstructed signal')
xlabel('x')
ylabel('IFFT(FFT(sin(x)))')
```



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples

Computer exercise:

Add the Gaussian noise of standard deviation σ=20

(`20*randn(1,1000)`)

to the signal created in the previous excercise.

Plot the noised signal. Is it possible to determine the harmonic frequency using the time characteristic?

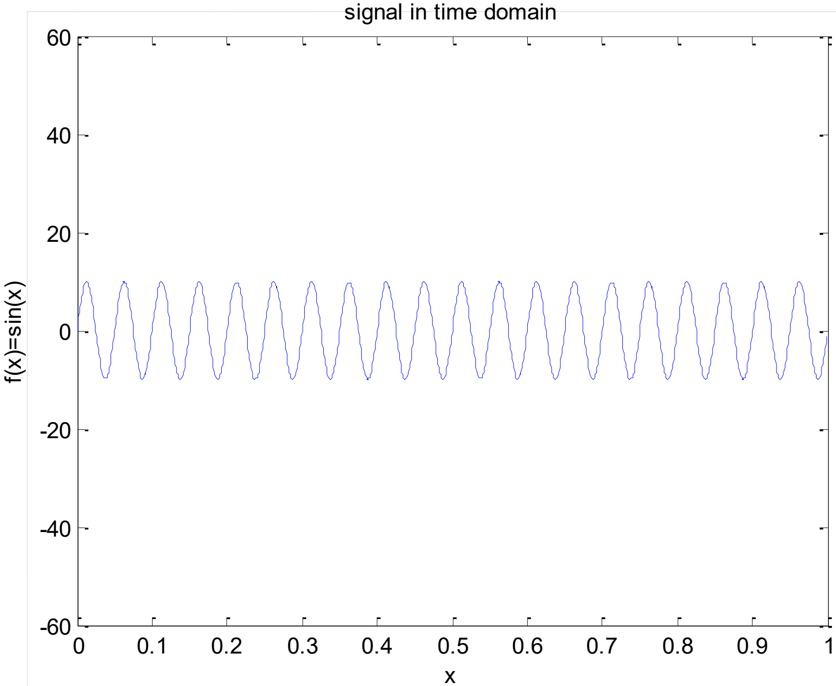
Plot the frequency spectrum of the noised signal and determine the main harmonic component of the signal.

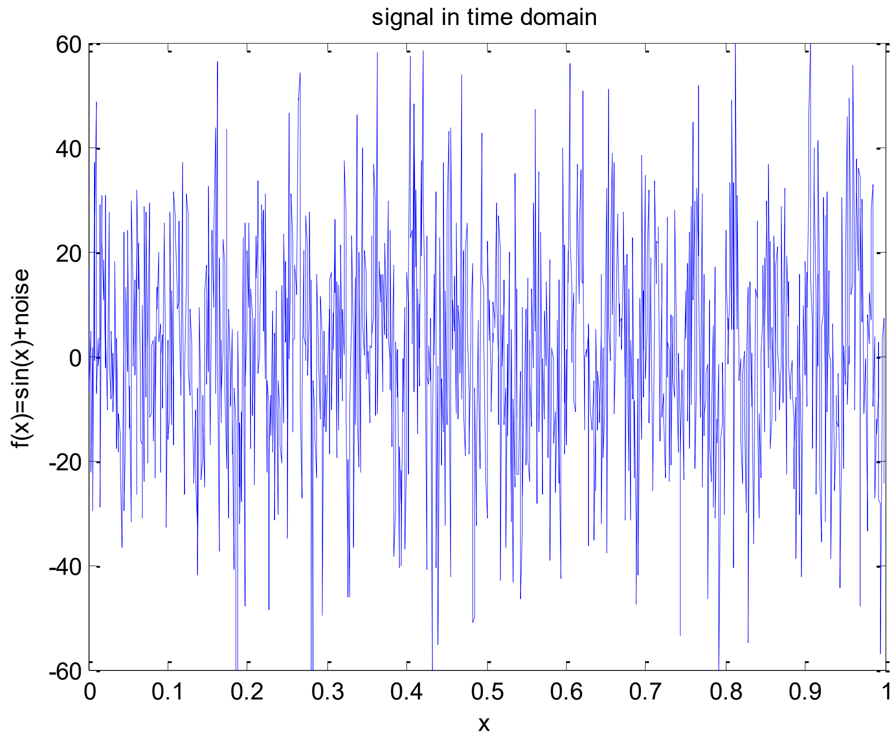
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples



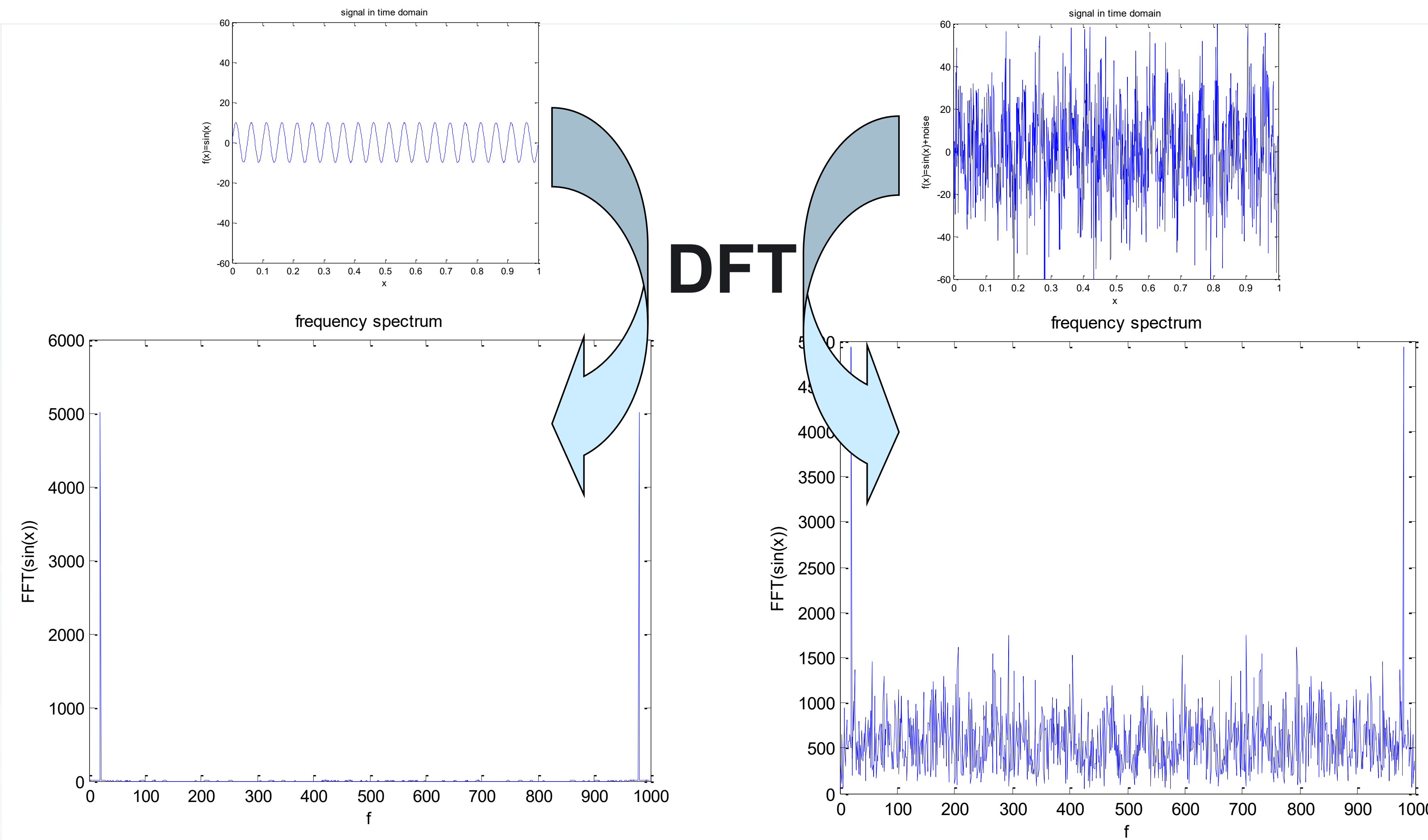


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

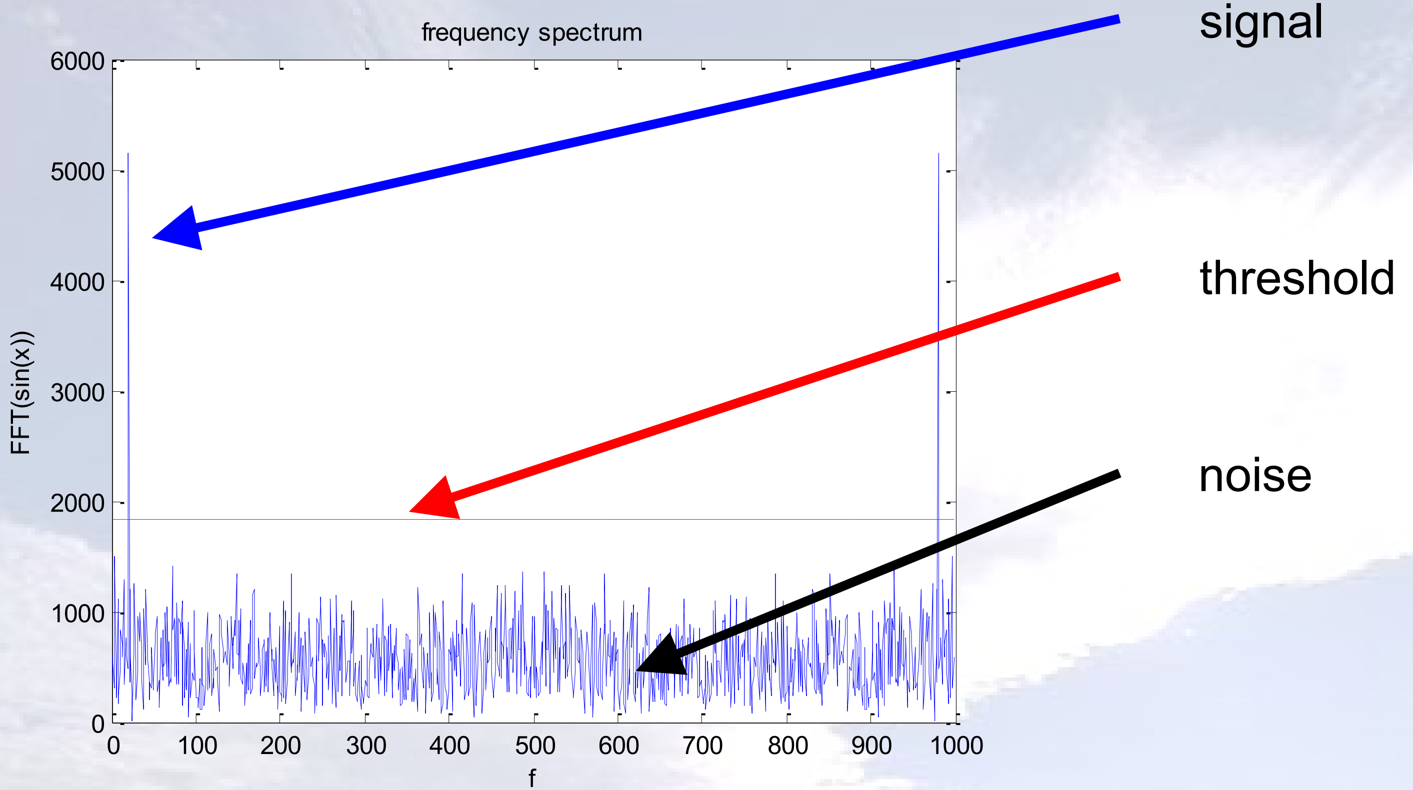
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples

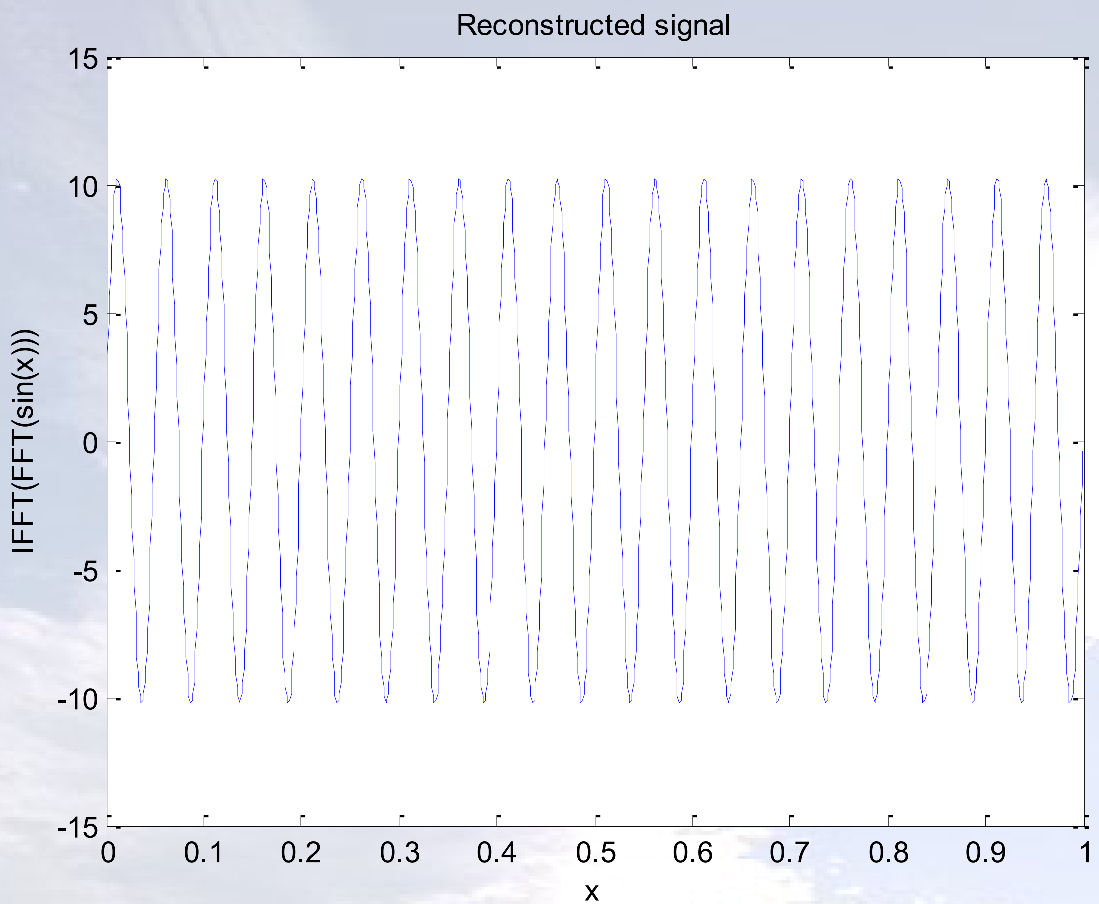


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples


frequency spectrum
FFT(sin(x))
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
f
signal
threshold
noise

Examples


Reconstructed signal
15
10
5
0
-5
-10
-15
IFFT(FFT(sin(x)))
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

Examples

Computer exercise:

Determine and plot the amplitude frequency spectrum of the ECG signal sampled at f_s=360 Hz

(*remember to subtract the mean from the signal prior to Fourier transform. Use 1024-point DFT*).

Analyse the ECG signal spectrum.

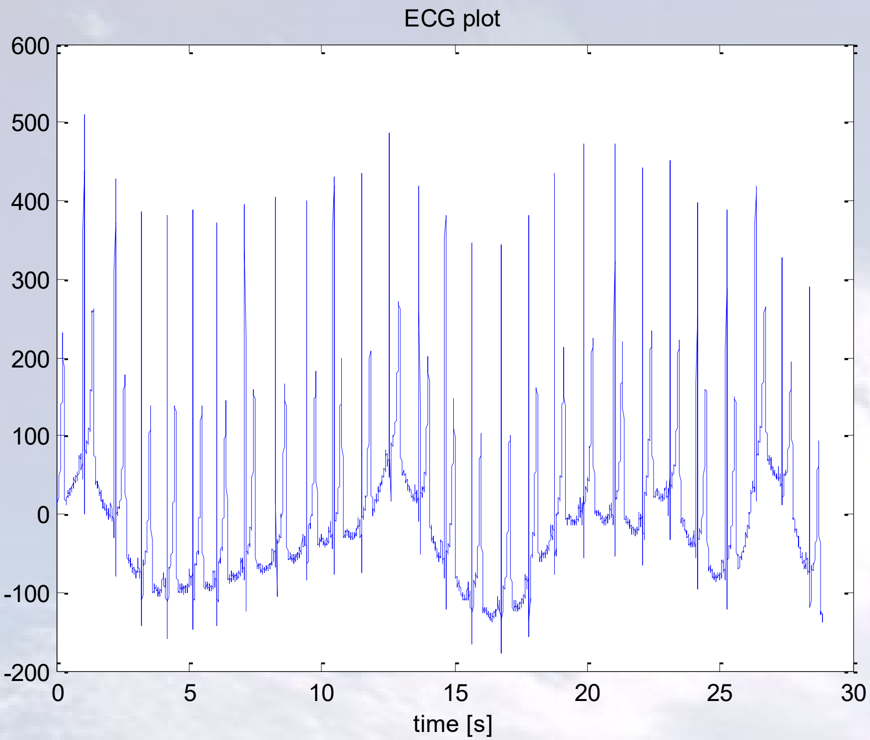
Notice the mains frequency.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

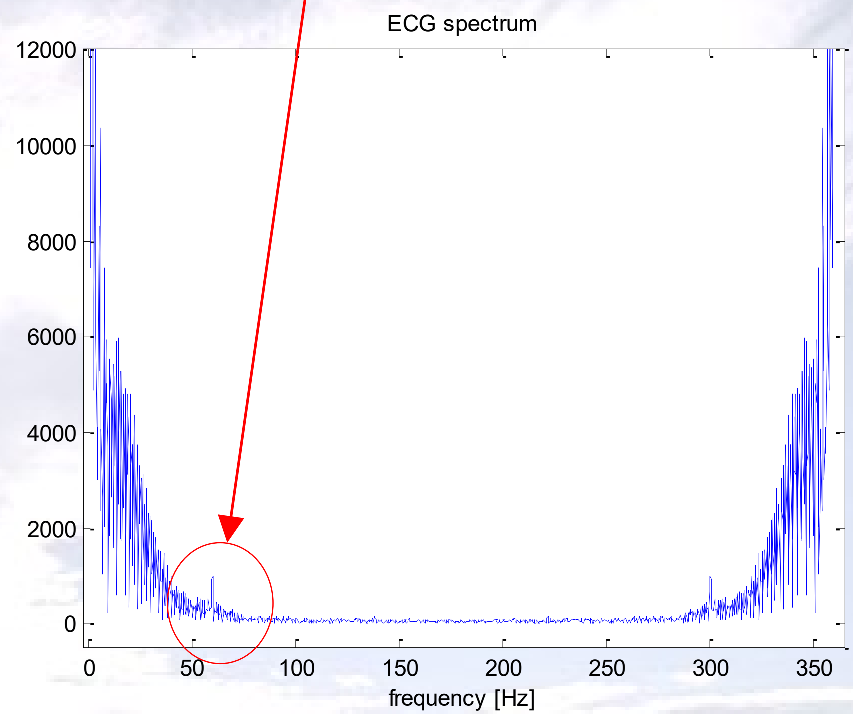
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Examples



mains frequency 60 Hz



In practice a **Fast Fourier Transform (FFT)** is used

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad dla \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$X(0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j0\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

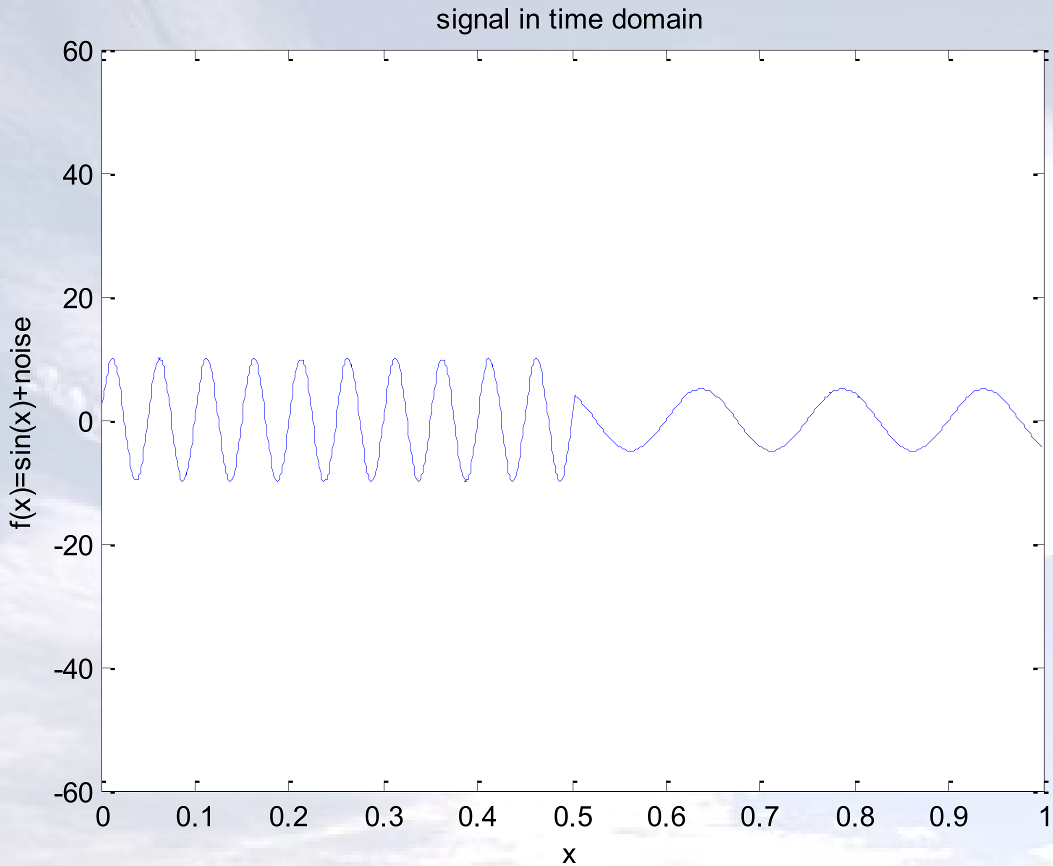
Single coefficient

N	N^2 (FT)	NlogN (FFT)	Zysk N/logN
16	256	64	4
256	65535	2048	32
512	262144	4608	64
2048	~4e6	22528	186

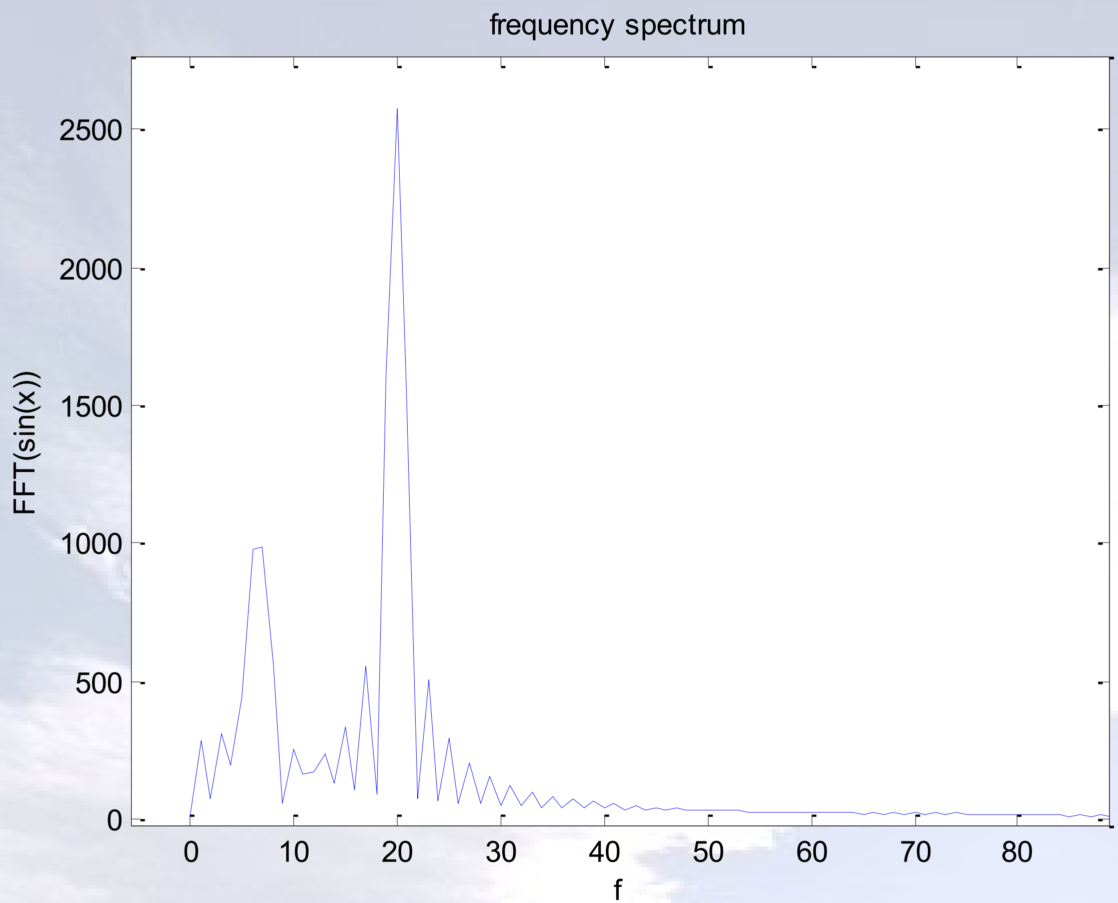
In FFT symmetry and periodicity of complex harmonics is used

Short Time Fourier Transform

Consider the following non-stationary signal:

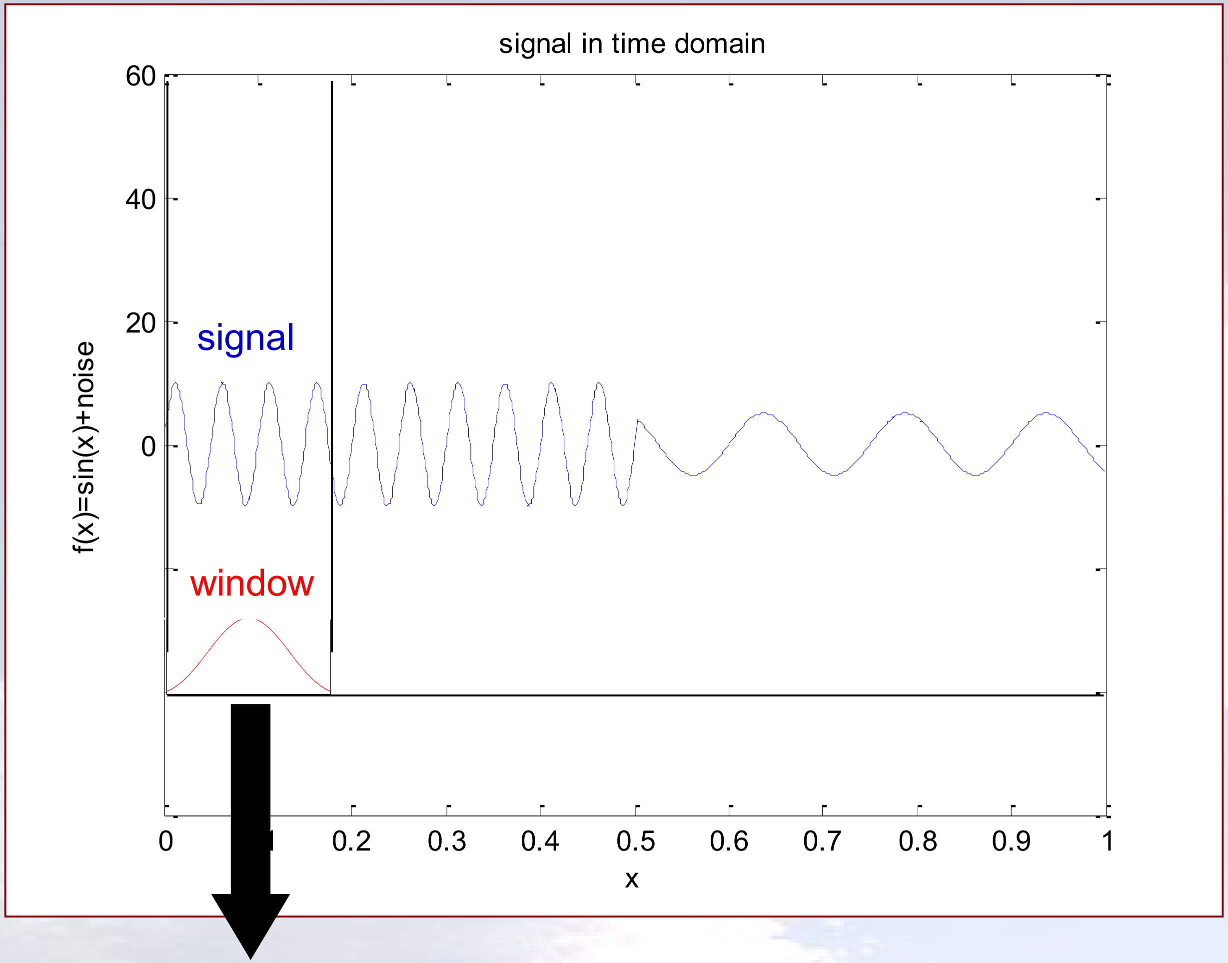


Short Time Fourier Transform



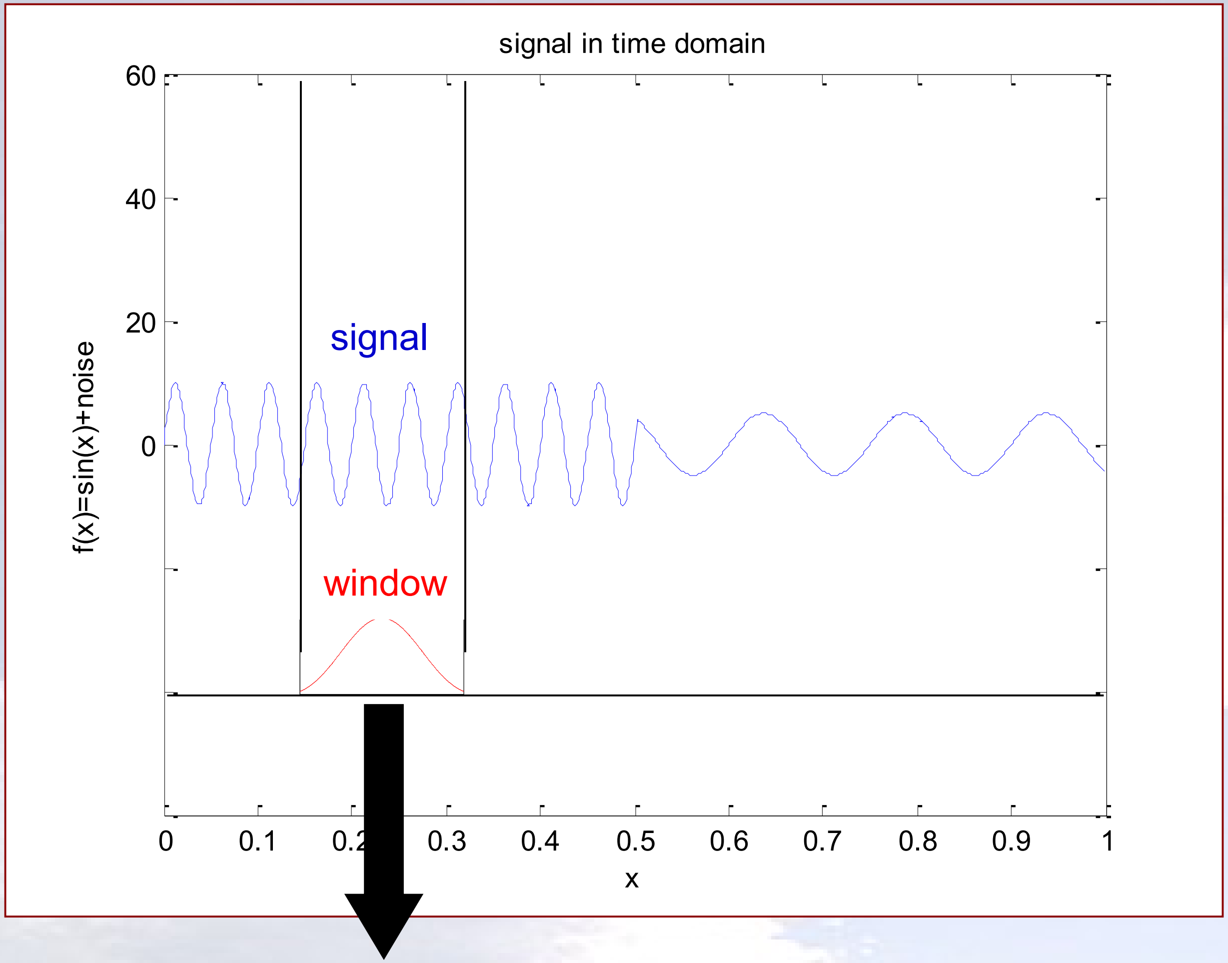
What important information is lost in the frequency spectrum?

Short Time Fourier Transform



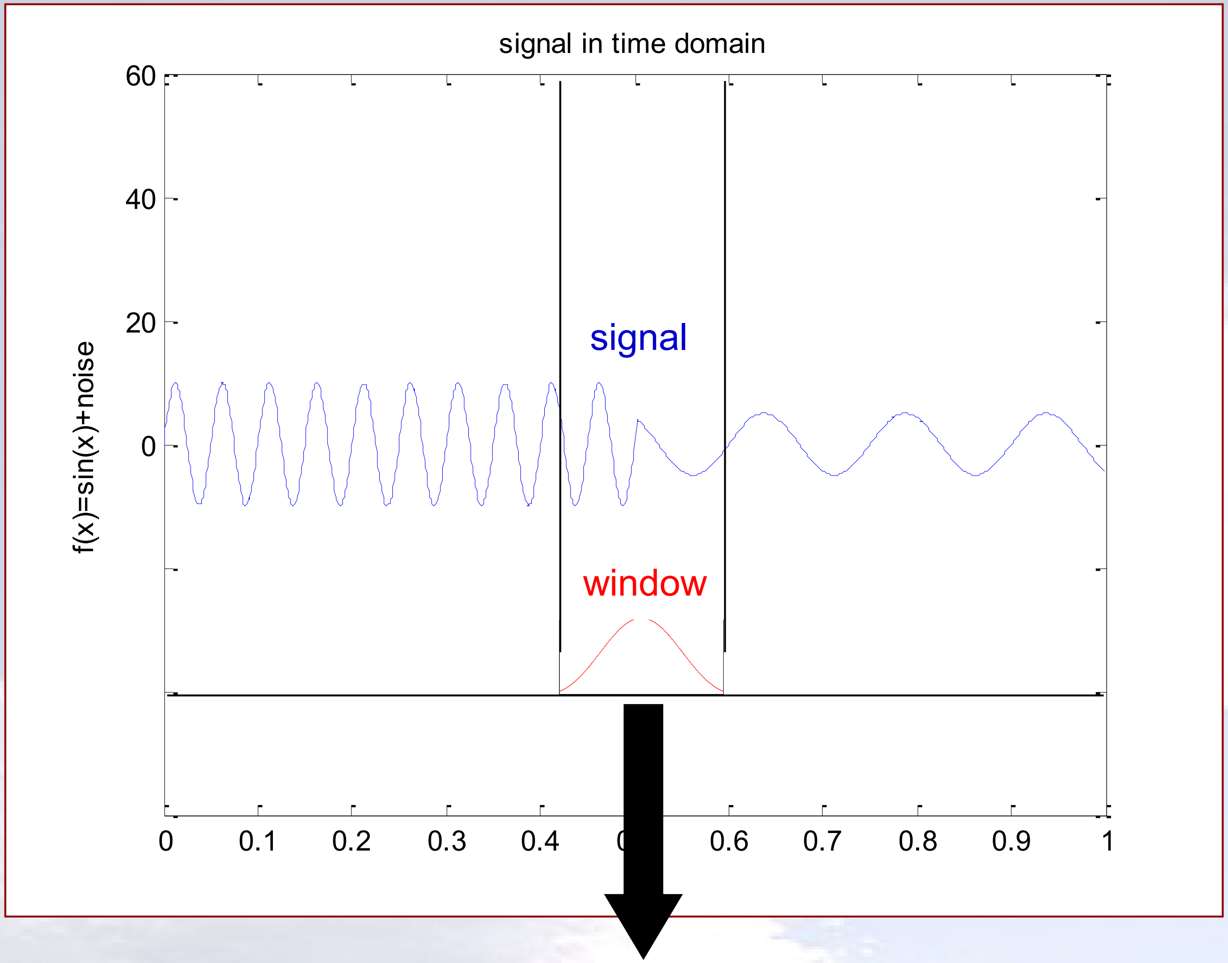
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



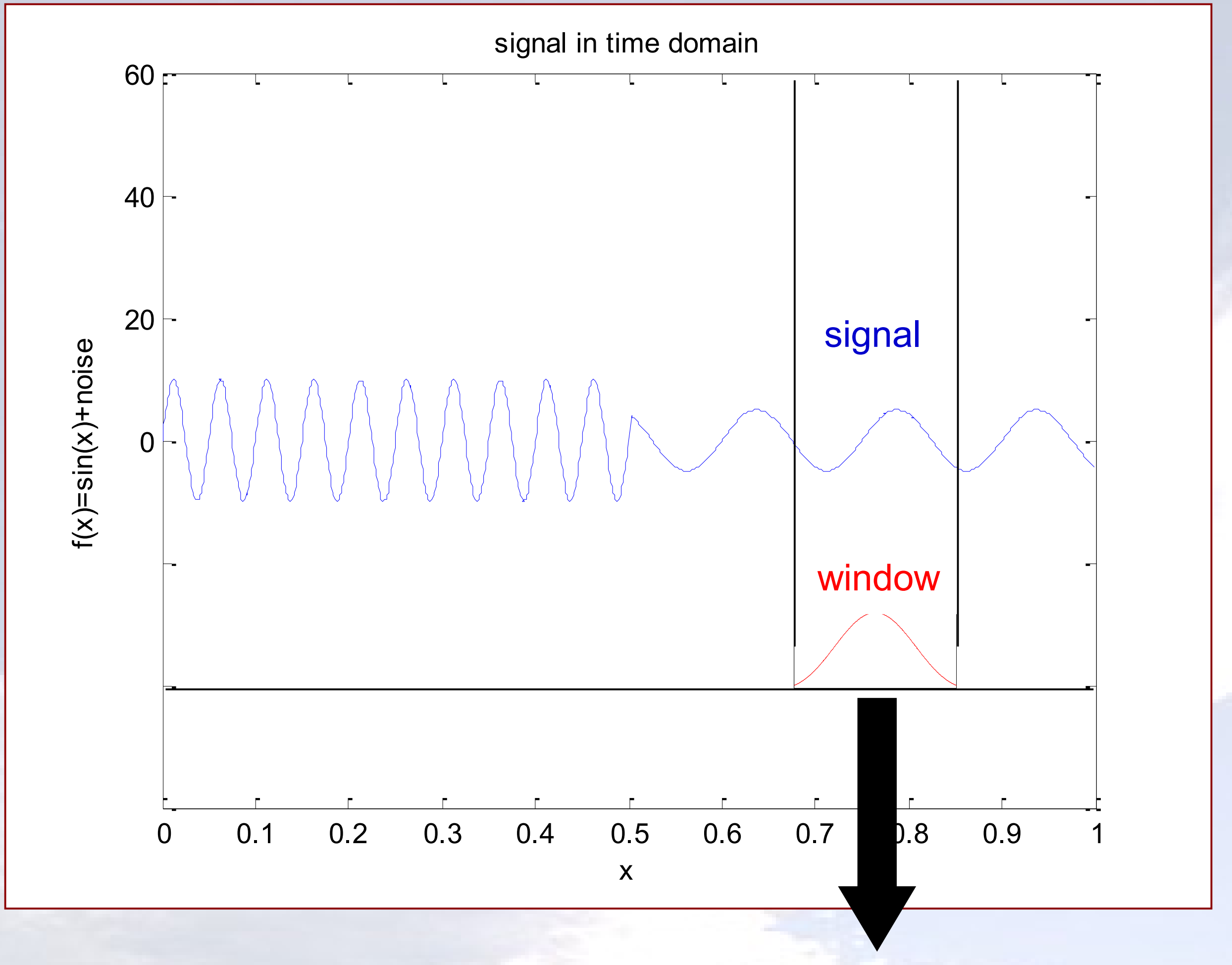
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



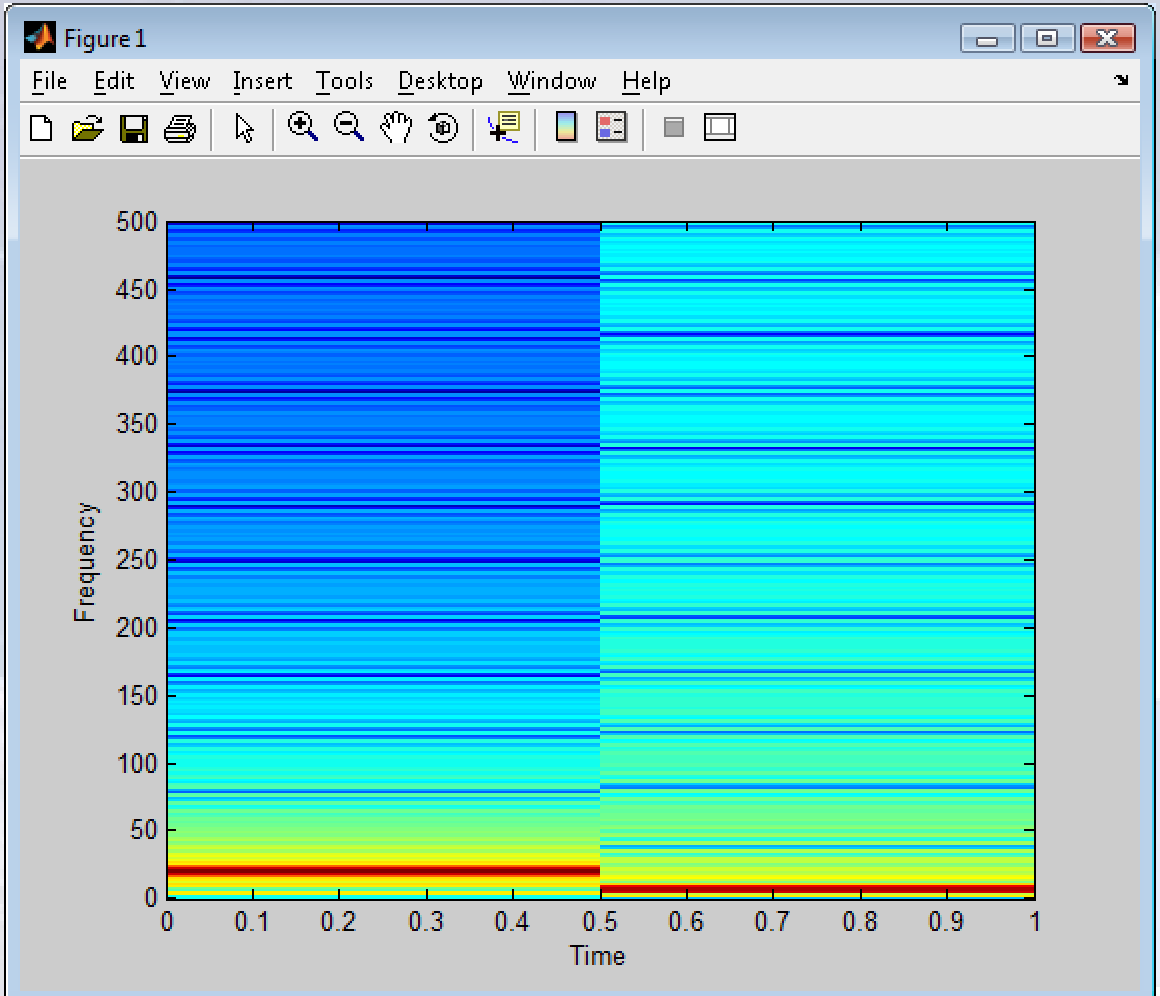
DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



DFT(signal*window)

Short Time Fourier Transform



Short Time Fourier Transform

$$STFT(x(n)) = X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n-m)e^{-j\omega n}$$

signal

discrete time variable

discrete frequency variable

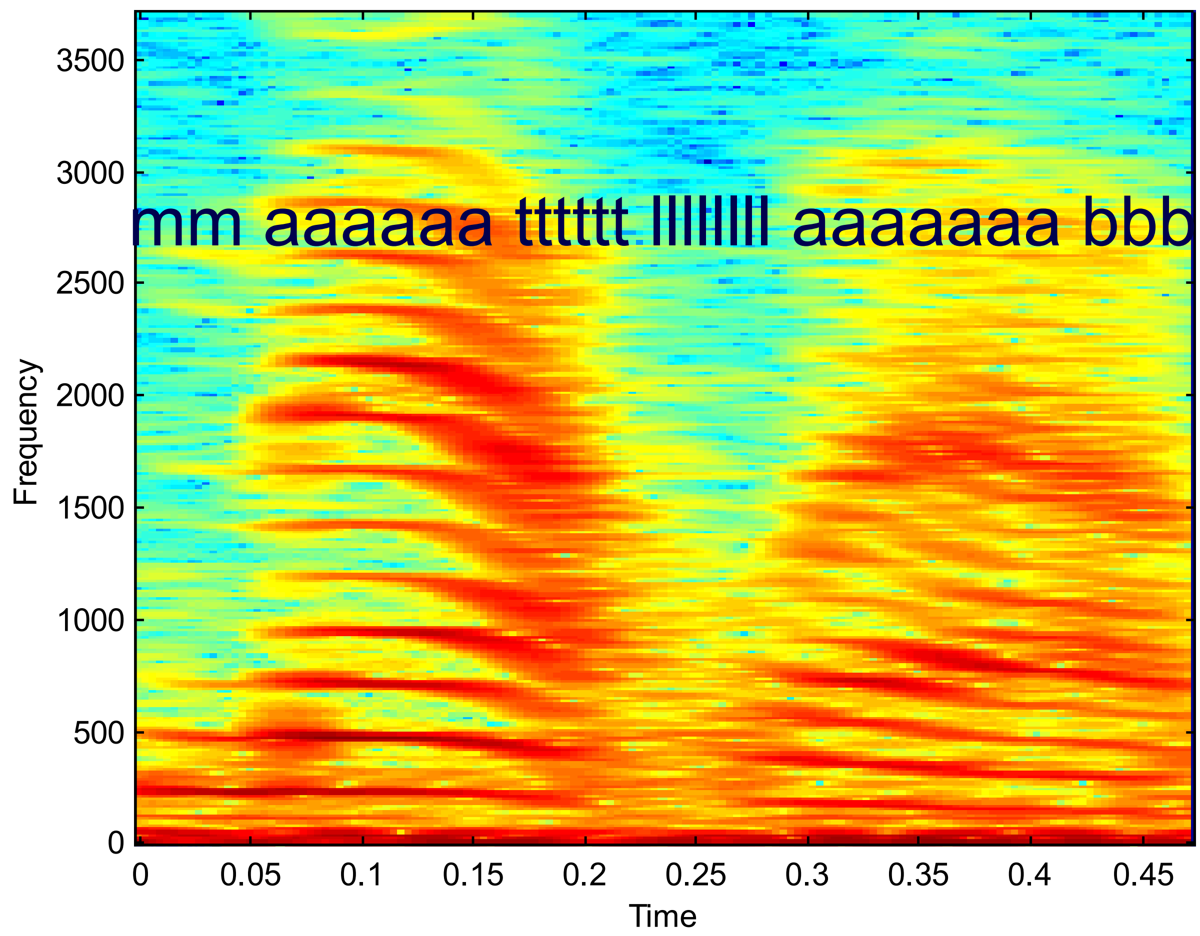
window function

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

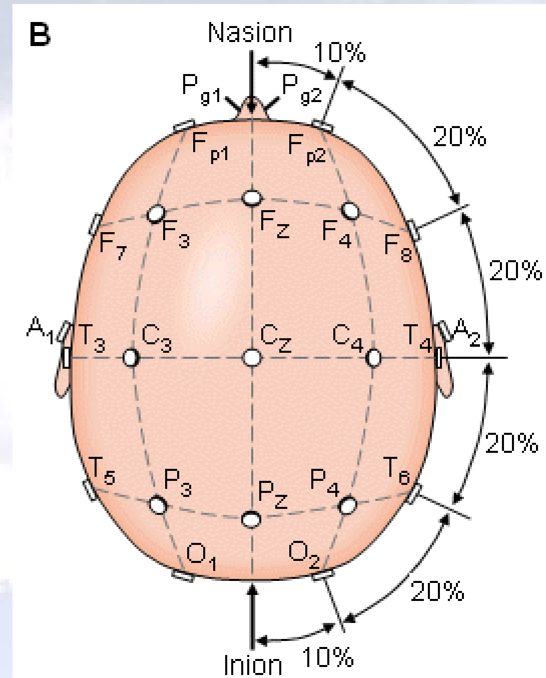
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Short Time Fourier Transform



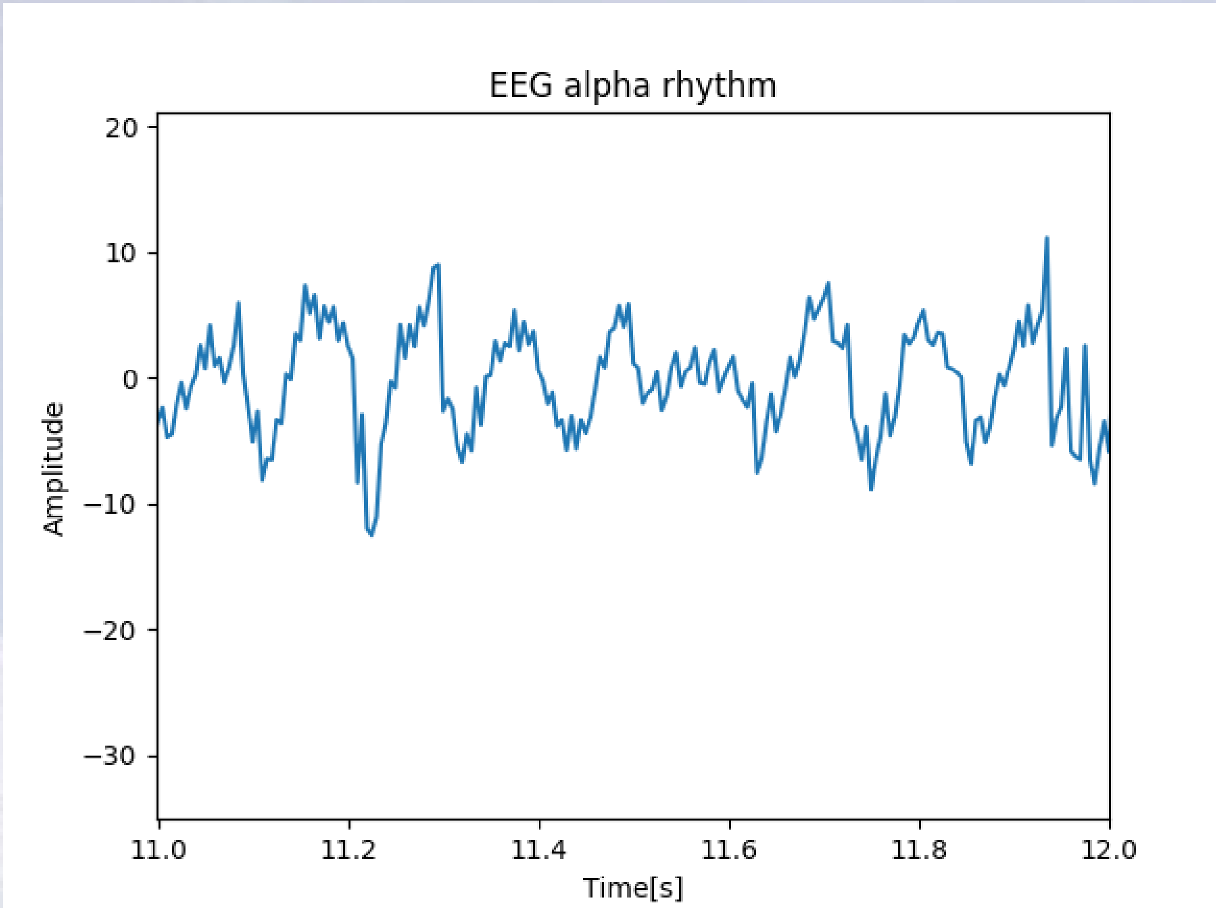
Electroencephalography

Electroencephalography – a noninvasive measurement technique of an electrical activity of the brain



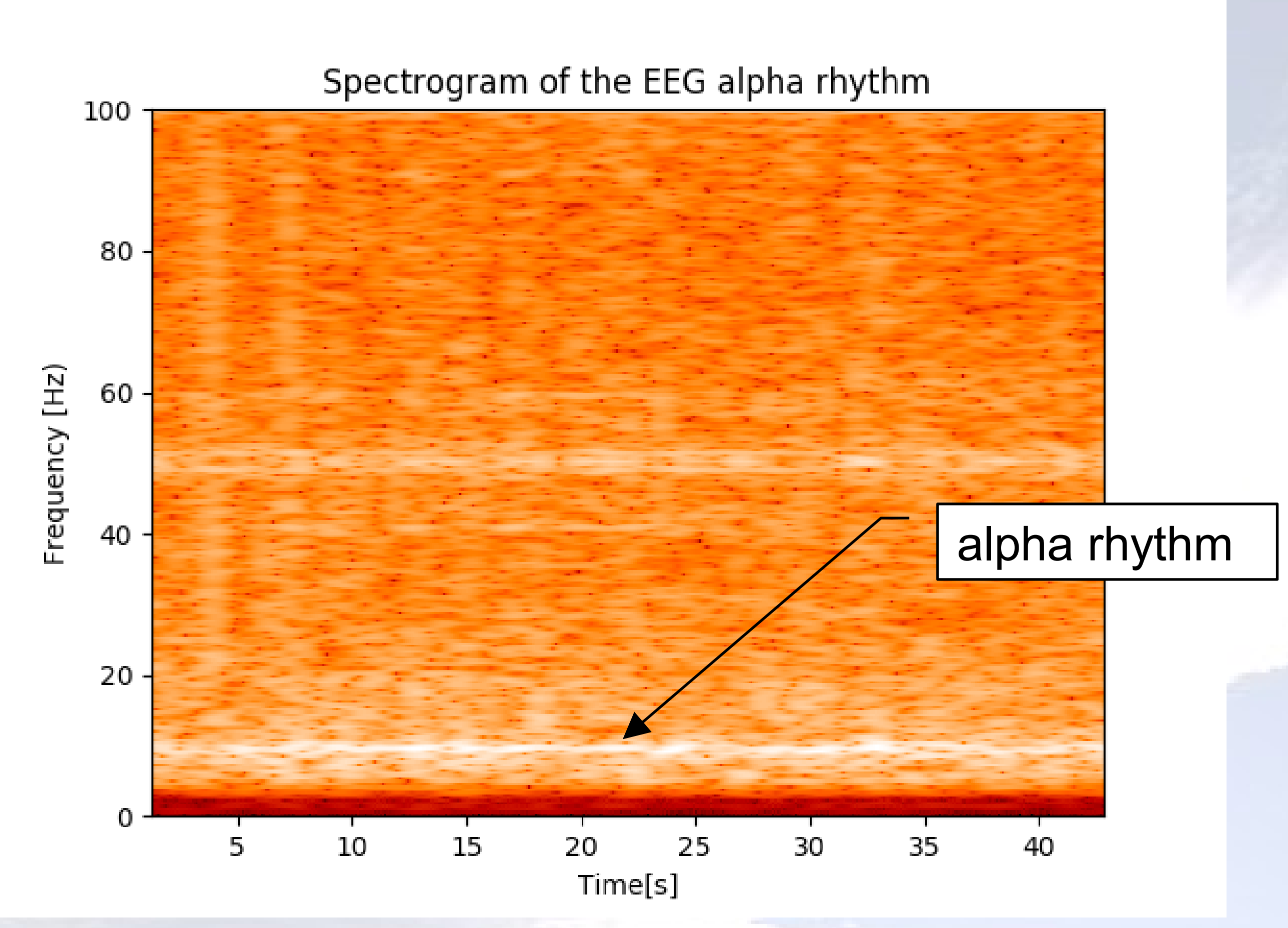
Standard positioning points
of EEG electrodes (system10/20)

EEG signal



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Short Time Fourier Transform



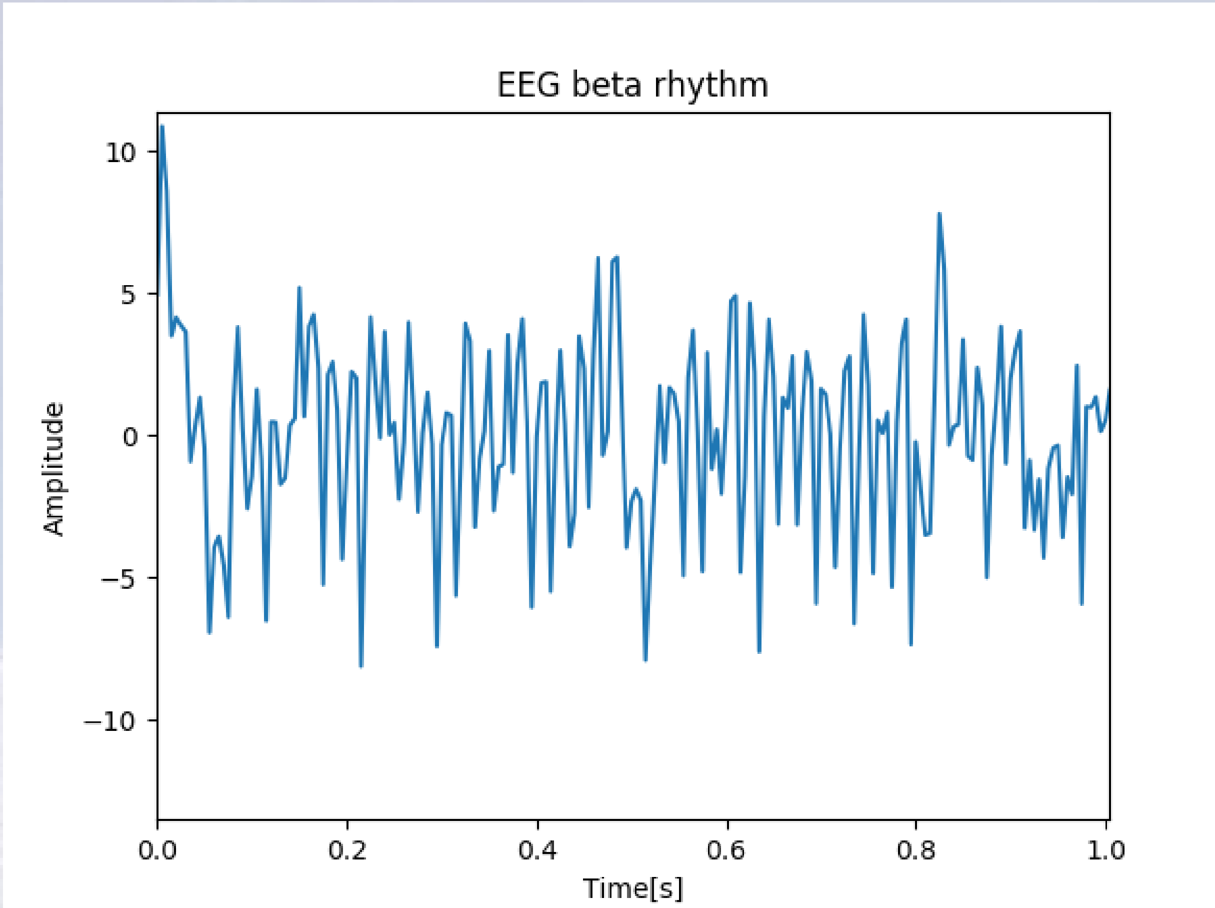
Pxx, freqs, bins, im = specgram(eeg1, NFFT=512, Fs=200, noverlap=500, cmap=cm.gist_heat)

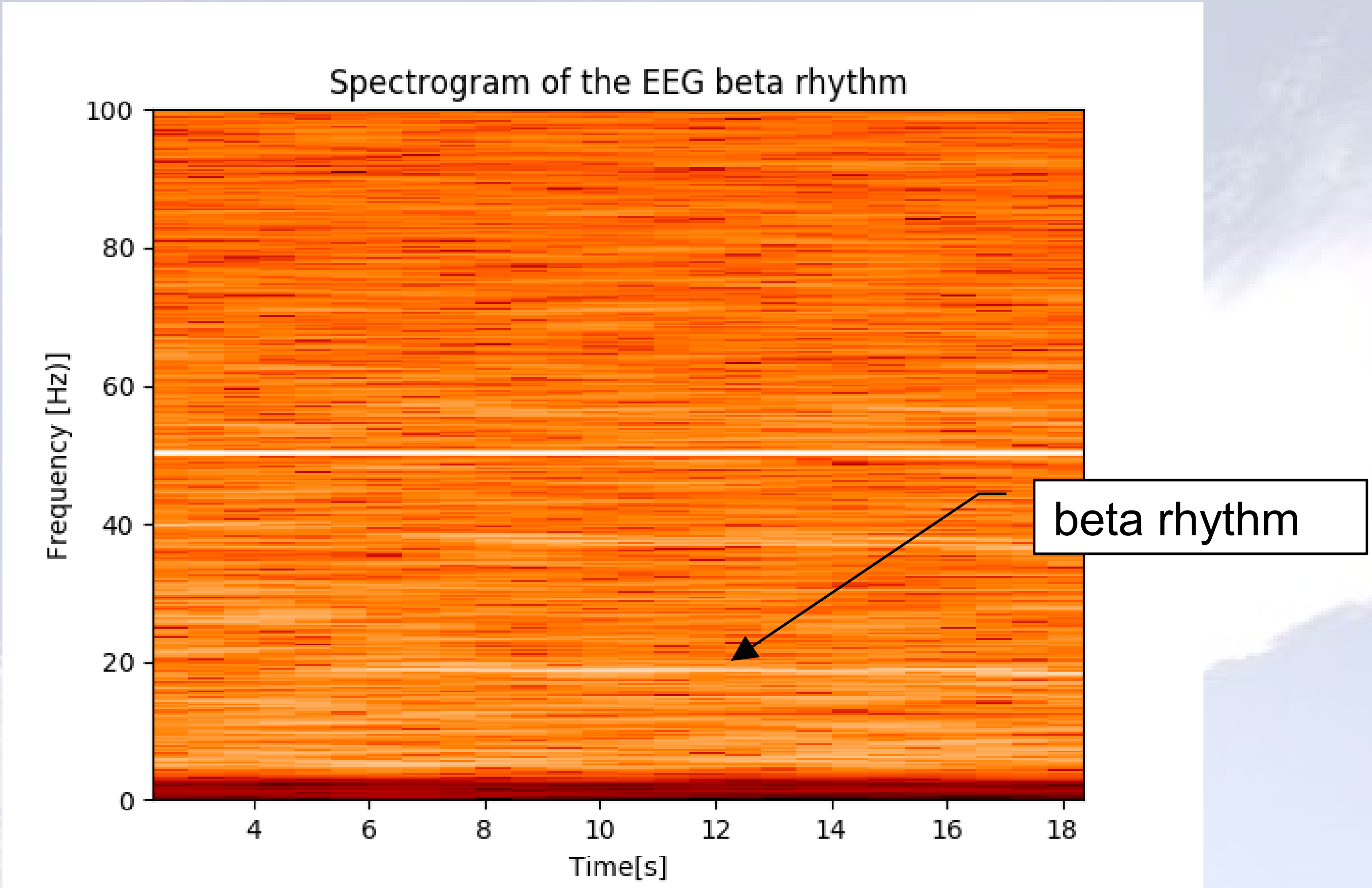
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

EEG signal





Pxx, freqs, bins, im = specgram(eeg2, NFFT=512, Fs=200, noverlap=500, cmap=cm.gist_heat)

Summary

1. Fourier series
2. Exponential Fourier series
3. Fourier Transform
4. Discrete Fourier Transform
5. Fourier spectrum interpretation
6. Short Time Fourier Transform

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

„SIGNAL PROCESSING”

Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego w projekcie pt.

„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń - zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej - zarządzanie Uczelnią, nowoczesna oferta edukacyjna i wzmacniania zdolności do zatrudniania osób niepełnosprawnych”

Politechnika Łódzka

Politechnika Łódzka, ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź, tel. (042) 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl